МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Р.В. Захарченко, С.В. Пальцун

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З МЕХАНІКИ ТА МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ

Рукопис

«ЕК» НТУУ “КПІ”, 2012

Р.В. Захарченко, С.В. Пальцун. Конспект лекцій з механіки та молекулярної фізики [Електронний ресурс]: рукоп. видан. для студентів енергетичних спеціальностей НТУУ “КПІ”, «ЕК» НТУУ “КПІ”, 2012 – 174 с.

Навчальний посібник за змістом відповідає стандартному курсу лекцій з механіки та молекулярної фізики і термодинаміки, який включає розділи від кінематики і динаміки точки до спеціальної теорії відносності і основ термодинаміки та молекулярно кінетичної теорії. Особливу увагу приділено встановленню основних понять механіки, аналізу експериментальних фактів та математичному формулюванню фундаментальних законів. Це безумовно сприятиме формуванню у читача матеріалістичного світогляду.

Для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Зміст

Фізичні основи механіки

Елементи механіки суцільних середовищ

Елементи спеціальної (частинної) теорії відносності

Основи молекулярної фізики і термодинаміки

Молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів

Основи термодинаміки

Реальні гази, рідини і тверді тіла

Елементи спеціальної (частинної) теорії відносності

§ 34. Перетворення Галілея. Механічний принцип відносності

Якщо системи відліку рухаються відносно одна одної рівномірно і прямолінійно і в одній з них справедливі закони динаміки Ньютона, то ці системи є інерціальними. Встановлено також, що в усіх інерціальних системах відліку закони класичної динаміки мають однакову форму; в цьому суть **механічного принципу відносності (принципу відносності Галілея).**

Для його доказу розглянемо дві системи відліку: інерціальну систему *K* (з координатами *x, y, z),* яку умовно вважатимемо нерухомою, і систему *K′* (з координатами *x′, y′, z′),* що рухається відносно *K* рівномірно і прямолінійно із швидкістю **u** (**u**=const). Відлік часу почнемо з моменту, коли початки координат обох систем збігаються. Нехай в довільний момент часу *t* розташування цих систем одна відносно одної має вигляд, показаний на рис. 58. Швидкість u спрямована вздовж *OO′,* радіус-вектор, проведений з O в *O′,* $\mathbf{r}_0=\mathbf{u}t$.

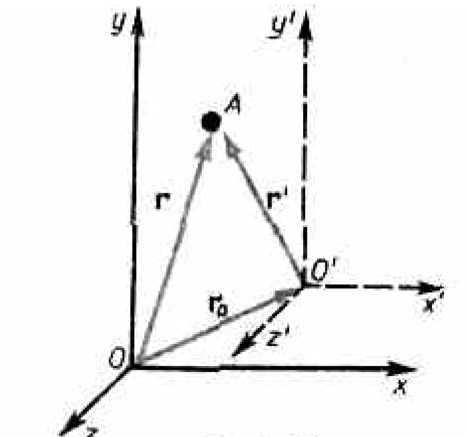

Рис. 58

Знайдемо зв'язок між координатами довільної точки *A* в обох системах. З рис. 58 видно, що

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t. \quad (34.1)$$

Рівняння (34.1) можна записати в проекціях на осі координат:

$$\begin{cases} x = x' + u_x t, \\ y = y' + u_y t, \\ z = z' + u_z t. \end{cases} \qquad (34.2)$$

Рівняння (34.1) і (34.2) носять назву **перетворень координат Галілея.**

В окремому випадку, коли система *K′* рухається із швидкістю v вздовж позитивного напрямку осі *x* системи *K* (у початковий момент часу осі координат збігаються), перетворення координат Галілея мають вигляд

$$\begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases}$$

У класичній механіці вважається, що хід часу не залежить від відносного руху систем відліку, тобто до перетворень (34.2) можна додати ще одне рівняння:

$$t = t'. \quad (34.3)$$

Записані співвідношення справедливі лише в разі класичної механіки (u<<c), а при швидкостях, порівнянних із швидкістю світла, перетворення Галілея замінюються загальнішими перетвореннями Лоренца (§36).

Продиференціювавши вираз (34.1) за часом (з урахуванням (34.3)), отримаємо рівняння

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}, \quad (34.4)$$

яке є **правилом додавання швидкостей в класичній механіці**.

Прискорення в системі відліку *K*

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\mathbf{v}' + \mathbf{u})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}'.$$

Таким чином, прискорення точки *A* в системах відліку *K* і *K*,, що рухаються один відносно одного рівномірно і прямолінійно, однаково:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (34.5)$$

Отже, якщо на точку А інші тіла не діють ($\mathbf{a} = 0$), то, відповідно до (34.5), і $\mathbf{a}' = 0$, тобто система К" є інерціальною (точка рухається відносно неї рівномірно і прямолінійно або знаходиться у стані спокою).

Таким чином, із співвідношення (34.5) витікає доказ механічного принципу відносності: рівняння динаміки при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої не змінюються, тобто є **інваріантними** по відношенню до перетворень координат. Галілей звернув увагу, що жодними механічними дослідами, проведеними в даній інерціальній системі відліку, не можна встановити, покоїться вона або рухається рівномірно і прямолінійно. Наприклад, сидячи в каюті корабля, що рухається рівномірно і прямолінійно, ми не можемо визначити, покоїться корабель або рухається, не виглянувши у вікно.

§ 35. Постулати спеціальної (частинної) теорії відносності

Класична механіка Ньютона чудово описує рух макротіл, що рухаються з малими швидкостями (v<<c). Проте в кінці XIX ст. з'ясувалося, що виводи класичної механіки протирічать деяким дослідним даним, зокрема при вивченні руху швидких заряджених часток виявилось, що їх рух не підкоряється законам механіки. Далі виникли труднощі при спробах застосувати механіку Ньютона до пояснення поширення світла. Якщо джерело і приймач світла рухаються один відносно одного рівномірно і прямолінійно, то, згідно з класичною механікою, виміряна швидкість повинна залежати від відносної швидкості їх руху. Американський фізик А. Майкельсон (1852— 1913) в своєму знаменитому досліді в 1881 р., а потім в 1887 р. спільно с Е. Морлі (американський фізик,

1838—1923) — **дослід Майкельсона — Морлі** — намагався виявити рух Землі відносно ефіру (ефірний вітер), застосовуючи інтерферометр Майкельсона (див. § 175). Виявити ефірний вітер Майкельсону не вдалося, як, втім, не вдалося його виявити і в інших чисельних дослідах. Досліди «уперто» показували, що швидкості світла в двох рухомих одна відносно одної системах рівні. Це суперечило правилу додавання швидкостей класичної механіки.

Одночасно було показане протиріччя між класичною теорією і рівняннями (див. § 139) Дж.К.Максвелла (англійський фізик, 1831 —1879), що лежать в основі розуміння світла як електромагнітної хвилі.

Для пояснення цих і деяких інших дослідних даних необхідно було створити нову механіку, яка, пояснюючи ці факти, містила б ньютонівську механіку як граничний випадок для малих швидкостей ($v<<c$). Це і вдалося зробити А. Ейнштейнові, одному із засновників сучасної фізики. А. Ейнштейн прийшов до виводу про те, що світового ефіру — особливого середовища, яке могло б бути прийняте в якості абсолютної системи, - не існує. Існування стаолї швидкості поширення світла у вакуумі узгоджувалося з рівняннями Максвелла

Таким чином, А. Ейнштейн заклав основи спеціальної теорії відносності. Ця теорія є сучасною фізичною теорією простору і часу, в якій, як і в класичній ньютонівській механіці, вважається, що час однорідний (див. §13), а простір однорідний (див. § 9) і ізотропний (див. §19). Спеціальна теорія відносності часто називається також **релятивістською теорією**, а специфічні явища, що описуються цією теорією, - **релятивістськими ефектами**.

В основі спеціальної теорії відносності лежать постулати Ейнштейна, сформульовані ним в 1905 р.

І. Принцип відносності: жодні досліди (механічні, електричні, оптичні), проведені всередині даної інерціальної системи відліку, не дають можливості виявити, знаходится ця система у стані спокою, або рухається рівномірно і прямолінійно; *всі закони природи інваріантні* відносно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

ІІ. Принцип інваріантності швидкості світла: *швидкість світла у вакуумі* не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача і *однакова в усіх інерціальних системах відліку*.

Перший постулат Ейнштейна, що є узагальненням механічного принципу відносності Галілея на будь-які фізичні процеси, стверджує, таким чином, що фізичні закони інваріантні по відношенню до вибору інерціальної системи відліку, а рівняння, що описують ці закони, однакові за формою в усіх інерціальних системах відліку. Згідно з цим постулатом, всі інерціальні системи відліку абсолютно рівноправні, тобто явища (механічні, електродинамічні, оптичні і ін.) в усіх інерціальних системах відліку протікають однаково.

Відповідно до другого постулату Ейнштейна, *сталість швидкості світла — фундаментальна властивість природи*, яка констатується як дослідний факт.

Спеціальна теорія відносності вимагає відмови від звичних уявлень про простір і час, прийняті в класичній механіці, оскільки вони суперечать принципу сталості швидкості світла. Втратив сенс не лише абсолютний простір, але й абсолютний час.

Постулати Ейнштейна і теорія, побудована на їх основі, встановили новий погляд на світ і нові просторово-часові уявлення, такі, наприклад, як відносність довжин і проміжків часу, відносність одночасності подій. Ці і інші висновки з теорії Ейнштейна знаходять надійне експериментальне підтвердження, тим самим обгрунтовуючи постулати Ейнштейна — обгрунтовуючи спеціальну теорію відносності.

§ 36. Перетворення Лоренца

Аналіз явищ в інерціальних системах відліку, проведений А. Ейнштейном на основі сформульованих ним постулатів, показав, що класичні перетворення Галілея несумісні з ними і, отже, мають бути замінені перетвореннями, що вдовольняють постулати теорії відносності.

Для ілюстрації цього висновку розглянемо дві інерціальні системи відліку: *К* (з координатами *x, y, z*) і *К'* (з координатами *x', y', z'*), що рухається відносно *К* (уздовж осі *x*) із швидкістю v = const (рис.59). Нехай в початковий момент часу *t=t'*=0, коли початки координат О і О' збігаються, випромінюється світловий імпульс. Відповідно до другого постулату Ейнштейна, швидкість світла в обох системах одна і та ж і дорівнює *с*. Тому якщо за час *t* в системі *К* сигнал дійде до деякої точки *А*, (рис. 59), пройшовши відстань *x = ct,* (36.1) то в системі *К'* координата світлового імпульсу в момент досягнення точки *А* *x'=ct',* (36.2)

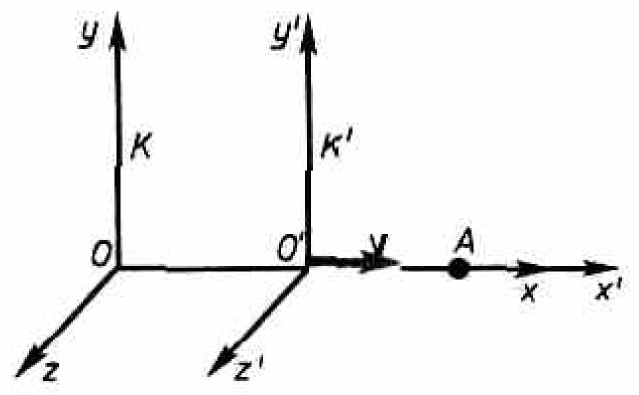

Рис. 59

де *t'* — час проходження світлового імпульсу від початку координат до точки *А* в системі К'. Віднімаючи (36.1) від (36.2), отрумуємо *x'—x = c(t'-t).*

Оскільки $x' \neq x$ (система *К'* переміщується відносно системи *К),* то $t' \neq t$, тобто. відлік часу в системах *К* и *К'* різний — *відлік часу має відносний характер* (в класичній фізиці вважається, що час в усіх інерціальних системах відліку тече однаково, тобто *t=t'*).

Ейнштейн показав, що в теорії відносності класичні перетворення Галілея, що описують перехід від однієї інерціальної системи відліку до іншої (см.§34):

$$K \rightarrow K' \qquad\qquad K' \rightarrow K$$

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases}$$

— замінюються перетвореннями Лоренца, що задовольняють постулатам Ейнштейна (формули представлені для випадку, коли *К'* рухається відносно *К* зі швидкістю *v* вздовж осі *x*).

Ці перетворення запропоновані Лоренцом в 1904 р., ще до появи теорії відносності, як перетворення, відносно яких рівняння Максвелла (див. § 139) інваріантні.

Перетворення Лоренца мають вигляд

$$K \to K' \qquad\qquad K' \to K$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{l^2-\beta}}; \end{cases}$$

$$\beta = v/c.$$

З порівняння наведених рівнянь витікає, що вони симетричні і відрізняються лише знаком при *v*. Це очевидно, оскільки якщо швидкість руху системи *K'* відносно системи *К* дррівнює *v*, то швидкість руху *К* відносно *K'* дорівнює *-v*.

З перетворень Лоренца витікає також, що при малих швидкостях (порівнянно зі швидкістю світла), тобто коли $\beta \ll 1$, вони переходять в класичні перетворення Галілея (у цьому полягає суть **принципу відповідності**), які є, отже, граничним випадком перетворень Лоренца. При $v>c$ вирази (36.3) для *x, t, x', t'* втрачають фізичний зміст (стають уявними). Це, в свою чергу, відповідає тому, що рух з швидкістю, більшою швидкості світла у вакуумі неможливий.

З перетворень Лоренца витікає дуже важливий висновок про те, що як відстань, так і проміжок часу між двома подіями міняються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, тоді як в рамках перетворень Галілея ці величини вважалися абсолютними, такими, що не змінюються при переході від системи до системи. Крім того, як просторові, так і часові перетворення (див. (36.3)) не є незалежними, оскільки в закон перетворення координат входить час, а в закон перетворення часу — просторові координати, тобто встановлюється взаємозв'язок простору і часу. Таким чином, теорія Ейнштейна оперує не з тривимірним простором, до якого приєднується поняття часу, а розглядає нерозривно зв'язані просторові і часові координати, створюючі чотиривимірний простір-час.

§ 37. Наслідки перетворень Лоренца

1. Одночасність подій в різних системах відліку. Нехай в системі *К* в точках з координатами x_1 і x_2 в моменти часу t_1 і t_2 відбуваються дві події.

В системі *K'* їм відповідають координати x'_1 та x'_2 і моменти часу t_1 і t_2. Якщо *події в системі К відбуваються в одній точці* ($x_1=x_2$) *і є одночасними* ($t_1=t_2$), то, відповідно до перетворень (36.3)

$$x'_1=x'_2, t'_1=t'_2$$

тобто *ці події є одночасними і співпадають у просторі для будь-якої інерціальної системи відліку*.

Якщо *події в системі К просторово роз'єднані* ($x_1 \neq x_2$), *але одночасні* ($t_1=t_2$), *то в системі К'*, відповідно до перетворень Лоренца (36.3)

$$x'_1=\frac{x_1-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'_2=\frac{x_2-vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$'_1=\frac{1-vx_1/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_2=\frac{t-vx_2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x'_1\neq x'_2, \quad t'_1\neq t'_2.$$

Таким чином, в системі K' ці події, *залишаючись просторово роз'єднаними, виявляються і неодночасними*. Знак різниці t'_2- t'_1 визначається знаком виразу $v(x_1$-$x_2)$, тому в різних точках системи відліку K' (при різних v) різниця t'_2-t'_1 буде різною за величиною і може відрізнятися за знаком. Таким чином, в одних системах відліку перша подія може передувати другій, тоді як в інших системах відліку, навпаки, друга подія передує першій. Сказане, проте, не відноситься до причинно-наслідкових подій, оскільки можна показати, що порядок дотримання причинно-наслідкових подій однаковий у всіх інерціальних системах відліку.

2. Тривалість подій в різних системах відліку. Нехай в деякій точці (з координатою x), що покоїться відносно системи K, відбувається подія, тривалість якої (різниця показів годинників в кінці і початку події) τ=t_2-t_1, де індекси 1 і 2 відповідають початку і кінцю події. Тривалість цієї ж події в системі K

$$\tau'=t'_2-t'_1, \quad (37.1)$$

причому початку і кінцю події, відповідно до (36.3), відповідають

$$t'_1=\frac{t_1-vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t'_2=\frac{t_2-vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (37.2)$$

Подставляючи (37.2) в (37.1), отримаємо

$$\tau'=(t_2-t_1)/\sqrt{1-\beta^2},$$

или

$$\tau'=\tau/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (37.3)$$

Із співвідношення (37.3) витікає, що $\tau<\tau'$, тобто тривалість події, *що відбувається в деякій крапці, найменша в тій інерціальній системі відліку, відносно якої ця точка нерухома*. Цей результат може ще тлумачити таким чином: інтервал часу τ', відрахований за годинником в системі K', з точки зору спостерігача в системі K, довше ніж інтервал τ, відрахований за його годинником. Отже, годинник, рухомий відносно інерціальної системи відліку, йде повільніше ніж годинник, що покоїться, тобто хід годинника сповільнюється в системі відліку, відносно якої годинник рухається. На підставі відносності понять «нерухома» і «рухома» системи співвідношення для τ и τ' оборотні. З (37.3) витікає, що уповільнення ходу годинника стає помітним лише при швидкостях, близьких до швидкості світла у вакуумі.

У зв'язку з виявленням релятивістського ефекту уповільнення ходу годинника свого часу виникла проблема "парадоксу годинника" (іноді розглядається як "парадокс близнюків"), що викликала численні дискусії. Уявимо собі, що здійснюється фантастичний космічний політ до зірки, що знаходиться на відстані 500 світлових років (відстань, на яку світло від зірки до Землі доходить за 500 років), зі швидкістю, близькоюдо швидкості світла ($\sqrt{(1-\beta^2)}$ = 0,001). За земним годинником політ до зірки і назад продовжиться 1000 років, тоді як для системи корабля і космонавта в ньому така ж подорож займе всього 1 рік. Таким чином, космонавт повернеться на Землю в $1/\sqrt{(1-\beta^2)}$ разів молодшим, ніж його брат-близнюк, що залишився на Землі. Це явище, що дістало назву парадоксу близнюків, насправді парадоксу не містить. Справа в тому, що принцип відносності стверджує равноправность не всяких систем відліку, а тільки інерціальних. Неправильність міркування полягає в тому, що системи відліку, пов'язані з близнюками, - не еквівалентні: земна система інерціальна, а корабельна - неінерціальна, тому до них принцип відносності незастосовний.

Релятивістський ефект уповільнення ходу годинника є абсолютно реальним і отримав експериментальне підтвердження при вивченні нестабільних елементарних часток, що спонтанн6о розпадаються, в дослідах з □-мезонами. Середній час життя □-мезонів, що покояться (за годинником, що рухається разом з ними) $\tau \approx 2{,}2 \cdot 10^{-8}$с. Отже, □-мезони, що утворюються у верхніх шарах атмосфери(на висоті ≈30 км) і рухаються зі швидкістю, близькою до швидкості світла, повинні були б проходити відстані $c\tau \approx 6{,}6$ м, тобто не могли б досягати земної поверхні, що суперечить дійсності. Пояснюється це релятивістським ефектом уповільнення ходу часу: для земного спостерігача час життя □-мезона$\tau' = \tau/\sqrt{(1-\beta^2)}$, а шлях цих часток в атмосфері $v\tau' = (\beta c\tau' = \beta c\tau/\sqrt{(1-\beta^2)}$. Оскільки $\beta \approx 1$, то $v\tau' \gg c\tau$.

3. Довжина тіл в різних системах відліку. Розглянемо стержень, що розташований уздовж осі *x'* і нерухомий відносно системи *K'*. Довжина стержня в системі *K'* буде $l'_0 = x'_2 - x'_1$, де x'_1 і x'_2 – координати початку і кінця стержня, що не змінюються з часом *t'*, а індекс 0 показує, що в системі відліку *K'* стержень нерухомий. Визначимо довжину цього стержня в системі *K*, відносно якої він рухається із швидкістю *v*. Для цього необхідно виміряти координати його кінців x_1 та x_2 в системі *K в один і той же момент часу t*. Їх різниця $l = x_2 - x_1$ і дасть довжину стержня в системі К. Використовуючи перетворення Лоренцо (36.3), отримаємо

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е.

$$l'_0 = l/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (37.4)$$

Таким чином, довжина стержня, виміряна в системі, відносно якої він рухається, виявляється менше довжини, виміряної в системі, відносно якої стержень нерухомий. Якщо стержень знаходиться в стані спокою в системі К, то, визначаючи його довжину в системі К', знову-таки прийдемо до виразу (37.4).

З виразу (37.4) витікає, що лінійний розмір тіла, що рухається відносно інерціальної системи відліку, зменшується у напрямку руху в $\sqrt{(1-\beta^2)}$ разів, тобто так зване **лоренцеве скорочення довжини** *тим більше, чим більше швидкість руху*. З другого і третього рівнянь перетворень Лоренца (36.3) витікає, що

$$y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 \text{ і } z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1,$$

тобто *поперечні розміри тіла не залежать від швидкості його руху і однакові в усіх інерціальних системах відліку*. Таким чином, *лінійні розміри тіла найбільші в тій інерціальній системі відліку, відносно якої тіло нерухоме*.

4. Релятивістський закон додавання швидкостей. Розглянемо рух матеріальної точки в системі К', яка, в свою чергу, рухається відносно системи *К* зі швидкістю v. Визначимо швидкість цієї ж точки в системі *К*. Якщо в системі *К* рух точки в кожен момент часу t визначається координатами x, y, z, а в системі *К'* у момент часу t' – координатами x', y', z', то

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

и

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

є відповідно проекціями на осі x, y, z і x', y', z' вектора швидкості даної точки відносно систем *К* і *К'*.

Відповідно доперетворень Лоренца (36.3)

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz',$$

$$dt = \frac{dt' + v\,dx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Зробивши відповідні перетворення, отримуємо **релятивістський закон додавання швидкостей** спеціальної теорії відносності :

$$K' \to K \qquad\qquad K \to K'$$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \\ u_y = \dfrac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \\ u_z = \dfrac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + vu'_x/c^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \\ u'_y = \dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \\ u'_z = \dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}. \end{cases} \qquad (37.5)$$

Якщо матеріальна точка рухається паралельно до осі *x*, то швидкість *u* відносно системи К співпадає з u_x, а швидкість u' відносно *K'* – з u'_x. Тоді закон додавання швидкостей прийме вигляд

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \quad (37.6)$$

Легко переконатися в тому, що якщо швидкості v, *u'* та *u* малі в порівнянні зі швидкістю світла *c*, то формули (37.5) і (37.6) переходять в закон додавання швидкостей в класичній механіці (див. (34.4)). Таким чином, закони релятивістської механіки в граничному випадку для малих швидкостей (в порівнянні зі швидкістю світла) переходять в закони класичної фізики, яка, отже, є окремим випадком механіки Ейнштейна для малих швидкостей.

Релятивістський закон додавання швидкостей підкоряється другому постулату Ейнштейна (див. §35). Дійсно, якщо u' = *c*, то формула(37.6) набере вигляду u= *(c+v)/(1+cv/c)*=c (аналогічно можна показати, що при u =*c* швидкість u' також дорівнює c). Цей результат свідчить про те, що релятивістський закон додавання швидкостей узгоджується з постулатами Ейнштейна.

Доведемо також, що якщо швидкості, які додаються, наскільки завгодно близькі до швидкості світла *c*, то результуюча швидкість буде завжди менше або дорівнюватиме *c*. Як приклад розглянемо граничний випадок *u'* = *v* = *c*. Після підстановки у формулу (37.6) отримаємо u=c. Таким чином, при додаванні будь-яких швидкостей результат не може перевищити швидкості світла у вакуумі. Швидкість світла у вакуумі є граничною швидкістю, яку неможливо перевищити. Швидкість світла в будь-якому середовищі, дорівнює *c/n* (*n* – абсолютний показник заломлення середовища), граничною величиною не є (детальніше див. § 189).

§ 38. Інтервал між подіями

Перетворення Лоренца і наслідки з них приводять до висновку про відносність довжин і проміжків часу, значення яких в різних системах відліку різне. В той же час відносний характер довжин і проміжків часу в теорії Ейнштейна означає відносність окремих компонентів якоїсь реальної фізичної величини, що не залежить від системи відліку, тобто є *інваріантною* відносно перетворень координат. У чотиривимірному просторі Ейнштейна, в якому кожна подія характеризується чотирма координатами *(x, y, z, t)*, такою фізичною величиною є **інтервал** між двома подіями:

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-\to\ldots}$$
$$\overline{\ldots\to-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}, \qquad (38.1)$$

где $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=$ $=l_{12}$ — расстояние между точками обыч-

відстань між точками тривимірного простору, в яких ці події відбулися. Ввівши позначення $t_{12}=t_2-t_1$, одержимо

$$s_{12}=\sqrt{c^2t_{12}^2-l_{12}^2}.$$

Покажемо, що інтервал між двома подіями однаковий в усіх інерціальних системах відліку. Позначивши $\Delta t = t_2-t_1$, $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y = y_2-y_1$ і $\Delta z=z_2-z1$, вираз (38.1) можна записати у вигляді

$$s_{12}^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2.$$

Інтервал між тими ж подіями в системі *K'* дорівнює

$$(s'_{12})^2=c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2. \qquad (38.2)$$

Відповідно до перетворень Лоренца (36.3),

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-v\,\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \Delta y'=\Delta y,\quad \Delta z'=\Delta z,$$
$$\Delta t'=\frac{\Delta t-v\,\Delta x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Підставивши ці значення в(38.2), після елементарних перетворень одержимо, що $(s'_{12})^2 = c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2$, тобто $(s'_{12})^2 = s^2_{12}$.

Узагальнюючи отримані результати, можна зробити висновок, що інтервал, визначаючи просторово-часові співвідношення між подіями, є інваріантом при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Інваріантність інтервалу означає, що, незважаючи на відносність довжин і проміжків часу, течія подій носить об'єктивний характер і не залежить від системи відліку.

Теорія відносності, таким чином, сформулювала нове уявлення про простір і час, узагальнене далі в діалектичному матеріалізмі. Просторово-часові відношення є не абсолютними величинами, як стверджувала механіка Галілея-Ньютона, а відносними. Отже, уявлення про абсолютний простір і час є безпідставними. Крім того, інваріантність інтервалу між двома подіями свідчить про те, що простір і час органічно пов'язані між собою і утворюють єдину форму існування матерії - простір-час. Простір і час не існують поза матерією і незалежно від неї.

Подальший розвиток теорії відносності (**загальна теорія відносності**, або **теорія тяжіння**) показав, що властивості простору-часу в даній області визначаються полями тяжіння, що діють у ній. При переході до космічних масштабів геометрія простору-часу не є евклідовою (тобто незалежною від розмірів області простору-часу), а змінюється від однієї області до іншої залежно від концентрації мас в цих областях та їх руху.

§ 39. Основний закон релятивістської динаміки матеріальної точки

Відповідно до уявлень класичної механіки, маса тіла є величиною сталою. Проте наприкінці XIX сторіччя у дослідах з електронами, що швидко рухаються, було встановлено, що маса тіла залежить від швидкості його руху, а саме зростає зі збільшенням швидкості відповідно до закону

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad (39.1)$$

де m_0 – **маса спокою** матеріальної точки, тобто маса, виміряна в тій інерціальній системі відліку, відносно якої матеріальна точка знаходиться у спокої; c – швидкість світла у вакуумі; m - маса точки в системі відліку, відносно якої вона рухається із швидкістю v. З принципу відносності Ейнштейна (див. §35), що стверджує інваріантність усіх законів природи при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, витікає умова інваріантності рівнянь фізичних законів відносно перетворень Лоренца. Основний закон динаміки Ньютона

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

виявляється також інваріантним по відношенню до перетворень Лоренца, якщо в ньому справа стоїть похідна за часом від *релятивістського імпульсу*.

Основний закон релятивістської динаміки матеріальної точки має вигляд

$$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{v}\right), \qquad (39.2)$$

или

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \qquad (39.3)$$

где

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{v} \qquad (39.4)$$

— **релятивістський імпульс** матеріальної точки.

Відмітимо, що рівняння(39.3) зовнішньо співпадає з основним рівнянням ньютонівської механіки (6.7). Проте фізичний смисл його інший: справа стоїть похідна за часом від релятивістського імпульсу, що визначається формулою (39.4). Таким чином, рівняння (39.2) інваріантне по відношенню до перетворень Лоренца і, отже, задовольняє принципу відносності Ейнштейна. Слід враховувати, що ні імпульс, ні сила не є інваріантними величинами. Більше того, в загальному випадку прискорення не співпадає по напрямку з силою.

В силу *однорідності простору* (див. § 9) в релятивістській механіці виконується **закон збереження релятивістського імпульсу**: релятивістський імпульс замкненої системи зберігається, тобто не змінюється з часом. Часто взагалі не роблять застереження, що розглядають релятивістський імпульс, оскільки якщо тіла рухаються зі швидкостями, близькими до *c*, то можна використовувати лише релятивістський вираз для імпульсу.

Аналіз формул (39.1),(39.4) і(39.2) показує, що при швидкостях, значно менших швидкості світла, рівняння (39.2) переходить в основний закон (див. (6.5)) класичної механіки. Отже, умовою застосовності законів класичної (ньютонівською) механіки є умова $v \ll c$. Закони класичної механіки є наслідком теорії відносності для граничного випадку $v \ll c$ (формально перехід здійснюється при $c \to \infty$). Таким чином, *класична механіка - це механіка макротіл, що рухаються з малими швидкостями* (порівняно зі швидкістю світла у вакуумі).

Експериментальний доказ залежності маси від швидкості (39.1) є підтвердженням справедливості спеціальної теорії відносності. Надалі (див. §116) буде показано, що на підставі цієї залежності виконуються розрахунки прискорювачів.

§ 40. Закон взаємозв'язку маси і енергії

Знайдемо кінетичну енергію релятивістської частки (матеріальної точки). Раніше(§12) було показано, що приріст кінетичної енергії матеріальної точки при елементарному переміщенні дорівнює роботі сили на цьому переміщенні:

$$dT = dA \text{ або } dT = \mathbf{F}d\mathbf{r}. \quad (40.1)$$

Враховуючи, що $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, і підставивши в(40.1) вираз (39.2), отримаємо

$$dT = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\mathbf{v}\,dt = \mathbf{v}\,d\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Перетворивши цей вираз з урахуванням того, що $\mathbf{v}d\mathbf{v} = v\,dv$, і формули (39.1), прийдемо до виразу

$$dT = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = c^2\,dm, \quad (40.2)$$

тобто приріст кінетичної енергії частки пропорційний приросту її маси.

Оскільки кінетична енергія частки, що покоїться, дорівнює нулю, а її маса дорівнює масі спокою m_0, то, проінтегрувавши (40.2), отримаємо

$$T=(m-m_0)c^2, \quad (40.3)$$

або кінетична енергія релятивістської частки має вигляд

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right). \quad (40.4)$$

Вираз (40.4) при швидкостях $v \ll c$ переходить в класичне:

$$T = m_0v^2/2$$

(розкладаючи в ряд $(1-v^2/c^2)^{-1/2}= 1 +{}^1/_2 \mathrm{X} v^2/c^2+{}^3/_8 v^4/c^4+\ldots$ при $v \ll c$, правомірно нехтувати членами другого порядку малості).

А.Ейнштейн узагальнив положення (40.2), припустивши, що воно справедливе не лише для кінетичної енергії матеріальної точки, але і для повної енергії, а саме: будь-яка зміна маси Δm супроводжується зміною повної енергії матеріальної точки, $\Delta E=c^2\Delta m$. (40.5) Звідси А.Ейнштейн прийшов до універсальної залежності між повною енергією тіла E і його масою m :

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (40.6)$$

Рівняння(40.6), так само як і (40.5), виражає фундаментальний закон природи – **закон взаємозв'язку (пропорційності) маси та енергії**: повна енергія системи дорівнює добутку її маси на квадрат швидкості світла у вакуумі. Відмітимо, що в повну енергію E не входить потенціальна енергія тіла в зовнішньому силовому полі.

Закон (40.6) можна, враховуючи вираз (40.3), записати у вигляді

$$E = m_0c^2 + T,$$

звідки витікає, що тіло, що покоїться ($T = 0$), також має енергію

$$E_0=m_0c^2,$$

що називається **енергією спокою**. Класична механіка енергію спокою E_0 не враховує, вважаючи, що при $v=0$ енергія тіла, що покоїться, дорівнює нулю.

В силу однорідності часу (див. § 13) в релятивістській механіці, як і в класичній, виконується **закон збереження енергії**: повна енергія замкнутої системи зберігається, тобто не змінюється з часом.

З формул (40.6) і (39.4) знайдемо релятивістське співвідношення між повною енергією і імпульсом частки:

$$E^2 = m^2c^4 = m_0^2\,c^4 + p^2c^2,$$

$$E = \sqrt{m_0^2\,c^4 + p^2c^2}. \qquad (40.7)$$

Повертаючись до рівняння (40.6), відмітимо ще раз, що воно має універсальний характер. Воно застосовне до всіх форм енергії, тобто можна стверджувати, що з енергією, якої б форми вона не була, зв'язана маса

$$m=E/c^2 \; (40.8)$$

зв'язку і стійкість системи будь-яких часток (наприклад, атомного ядра як системи з протонів і нейтронів), розглядають енергію зв'язку. **Енергія зв'язку системи** дорівнює роботі, яку необхідно виконати, щоб розкласти цю систему на складові частини (наприклад, атомне ядро – на протони і нейтрони). Енергія зв'язку системи

$$E_{св} = \sum_{i=1}^{n} m_{0i}c^2 - M_0c^2, \qquad (40.9)$$

де m_{0i} – маса спокою *i*-ї частки у вільному стані; M_0 – маса спокою системи, що складається з *n* часток.

Закон взаємозв'язку (пропорційності) маси та енергії блискуче підтверджений експериментом про виділення енергії при протіканні ядерних реакцій. Він широко використовується для розрахунку енергетичних ефектів при ядерних реакціях і перетвореннях елементарних часток.

Розглядаючи висновки спеціальної теорії відносності, бачимо, що вона, як, втім, і будь-які великі відкриття, вимагає перегляду багатьох уявлень, що встановилися і стали звичними. Маса тіла не залишається сталою величиною, а залежить від швидкості тіла; довжина тіл і тривалість подій не є абсолютними величинами, а носять відносний характер; нарешті, маса і енергія виявилися зв'язаними одна з одною, хоча вони і є якісно різними властивостями матерії.

Цей злам укорінених уявлень деякі філософи намагалися використати для поширення двох різновидів ідеалізму: енергетизму і філософського релятивізму. Перша з цих теорій розглядала можливість перетворення маси в енергію і, навпаки, енергії в масу, "доводячи" "еквівалентність матерії і енергії". Закон взаємозв'язку маси і енергії дійсно стверджує, що будь-які перетворення енергії тіла супроводжуються змінами його маси, проте при цьому маса не "переходить в енергію". Закон взаємозв'язку маси і енергії є підтвердженням нерозривності матерії і руху – одного з основних положень діалектичного матеріалізму.

Філософський релятивізм вважає, що наше пізнання відносне і залежить "від вибору точки зору спостерігача". Проте з постулатів і наслідків теорії Ейнштейна відносність нашого пізнання не витікає. Той факт, що довжина тіл і тривалість подій в різних інерціальних системах відліку різні, не дає підстав вважати, що об'єктивний опис світу, що оточує нас, неможливий.

Головний висновок теорії відносності зводиться до того, що простір і час органічно взаємозв'язані і утворюють єдину форму існування матерії – простір-час. Тільки тому просторово-часовий інтервал між двома подіями є абсолютним, тоді як просторові і тимчасові проміжки між цими подіями відносні. Отже наслідки, що витікають з перетворень Лоренцо, є виразом об'єктивно існуючих просторово-часових співвідношень матерії, що рухається.

Контрольні питання

- В чому фізична суть механічного принципу відносності?
- В чому полягає правило додавання швидкостей в класичній механіці?
- Які причини виникнення спеціальної теорії відносності?
- В чому полягають основні постулати спеціальної теорії відносності?
- Чи залежить від швидкості руху системи відліку швидкість тіла? швидкість світла?
- Запишіть і прокоментуйте перетворення Лоренца. За яких умов вони переходять у перетворення Галілея?
- Який висновок про простір і час можна зробити на основі перетворень Лоренца?
- Чи одночасні події в системі K', якщо в системі K вони відбуваються в одній точці і одночасні? у системі K події роз'єднані, але одночасні? Обгрунтувати відповідь. Які наслідки витікають із спеціальної теорії відносності для розмірів тіл і тривалості подій в різних системах відліку? Обгрунтувати відповідь.
- При якій швидкості руху релятивістське скорочення довжини тіла, що рухається, складе 25%?
- В чому полягає "парадокс близнюків" і як його розрішити?
- В чому полягає релятивістський закон додавання швидкостей? Як показати, що він узгоджується з постулатами Ейнштейна?
- Як визначається інтервал між подіями? Довести, що він є інваріантом при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.
- Який вигляд має основний закон релятивістської динаміки матеріальної точки? Чим він відрізняється від основного закону ньютонівської механіки? У чому полягає закон збереження релятивістського імпульсу? релятивістської маси?
- Як виражається кінетична енергія в релятивістській механіці? За якої умови релятивістська формула для кінетичної енергії переходить в класичну формулу? Сформулюйте і запишіть закон взаємозв'язку маси і енергії. У чому його фізична суть? Наведіть приклади його експериментального підтвердження.

Задачі

7.1. Визначити власну довжину стержня (довжину, виміряну в системі, відносно якої стержень покоїться), якщо в лабораторній системі (системі відліку, пов'язаній з вимірювальними приладами) його швидкість v=0,8 *c*, довжина *l*=1 м і кут між ним і напрямом руху

движения $\vartheta = 30°$. [$l_0 = l\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)(1-v^2/c^2)} = 1{,}53$ м]

7.2. Власний час життя частки відрізняється на 1,5% від часу життя за нерухомим годинником. Визначити β=v/c. [0,172]

7.3. Тіло з масою спокою 2 кг рухається із швидкістю 200 Мм/с в системі *K′*, яка сама рухається відносно системи *K* із швидкістю 200 Мм/с. Визначити: 1) швидкість тіла відносно системи *K*; 2) його масу в цій системі. [1) 277 Мм/с; 2) 5,2 кг]

7.4. Скориставшись тим, що інтервал – інваріантна величина по відношенню до перетворень координат, визначити відстань, яка пролетів π-мезон з моменту народження до розпаду, якщо час його життя в цій системі відліку Δt=5 мкс, а власний час життя (час, відлічений по годиннику, що рухається разом з тілом) Δt_0=2,2 мкс. [1,35 км]

7.5. Визначити швидкість, за якої релятивістський імпульс частки перевищує її ньютонівський імпульс в п'ять разів. [0,98 *c*]

7.6. Визначити швидкість, отриману електроном, якщо він пройшов прискорюючу різницю потенціалів 1,2 МэВ. [2,86 Мм/с]

7.7. Визначити релятивістський імпульс електрона, кінетична енергія якого 1 Гэв. [$5,34 \cdot 10^{-19}$ Н·с]