МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Р.В. Захарченко, С.В. Пальцун

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З МЕХАНІКИ ТА МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ

*Рукопис*

«ЕК» НТУУ “КПІ”, 2012

Р.В. Захарченко, С.В. Пальцун. Конспект лекцій з механіки та молекулярної фізики [Електронний ресурс]: рукоп. видан. для студентів енергетичних спеціальностей НТУУ “КПІ”, «ЕК» НТУУ “КПІ”, 2012 – 174 с.

Навчальний посібник за змістом відповідає стандартному курсу лекцій з механіки та молекулярної фізики і термодинаміки, який включає розділи від кінематики і динаміки точки до спеціальної теорії відносності і основ термодинаміки та молекулярно кінетичної теорії. Особливу увагу приділено встановленню основних понять механіки, аналізу експериментальних фактів та математичному формулюванню фундаментальних законів. Це безумовно сприятиме формуванню у читача матеріалістичного світогляду.

Для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Зміст

# Фізичні основи механіки

## Елементи спеціальної (частинної) теорії відносності



## Основи молекулярної фізики і термодинаміки



## Молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів



## Основи термодинаміки



## Реальні гази, рідини і тверді тіла

## Лекція 5

## Динаміка обертального руху твердого тіла

### § 16. Момент інерції

При вивченні обертання твердого тіла користуються поняттям моменту інерції. **Моментом інерції** системи (тіла) відносно осі обертання називається фізична величина, що дорівнює сумі добутків мас *n* матеріальних точок системи на квадрати їх відстаней до розглядуваної осі:

$$J=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

У разі безперервного розподілу мас ця сума зводиться до інтегралу

$$J=\int r^2\,\mathrm{d}m,$$

де інтегрування проводиться по всьому об'єму тіла. Величина *r* в цьому випадку є функція положення точки з координатами *x, y, z.*

Як приклад знайдемо момент інерції однорідного суцільного циліндра висотою h і радіусом R відносно його геометричної осі (рис.23). Розіб'ємо циліндр

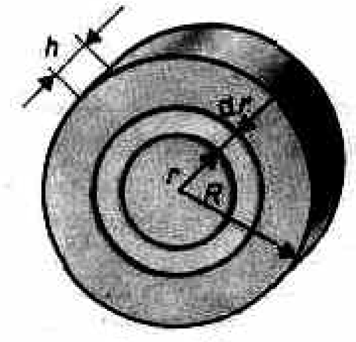


Рис. 23

на окремі порожні концентричні циліндри нескінченно малої товщини dr з внутрішнім радіусом r і зовнішнім - r + dr. Момент інерції кожного полого циліндра $dJ = r^2dm$ (оскільки dr<<r, то вважаємо, що відстань усіх точок циліндра від осі дорівнює r), де dm - маса всього елементарного циліндра; його об'єм $2\pi rhdr$. Якщо ρ - густина матеріалу, то $dm=\rho\cdot 2\pi rhdr$ і $dJ = 2\pi\rho r^3dr$. Тоді момент інерції суцільного циліндра

$$J=\int \mathrm{d}J=2\pi h\rho\int_0^R r^3\mathrm{d}r={}^1/_2\pi hR^4\rho,$$

але, оскільки $\pi R^2h$ - об'єм циліндра, то його маса $m = \pi R^2h\rho$, а момент інерції $J=1/2R^2$ .

Якщо відомий момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас, то момент інерції відносно будь-якої іншої паралельної осі визначається **теоремою Штейнера**: момент інерції тіла J відносно будь-якої осі обертання дорівнює моменту його інерції $J_c$ відносно паралельної осі, що проходить через центр мас C тіла, складеного з добутком маси *m* тіла на квадрат відстані *a* між осями:

$$J = J_c + ma^2. \quad (16.1)$$

Наприкінці наведемо значення моментів інерції (табл. 1) для деяких тіл (тіла вважаються однорідними, *m* - маса тіла).

Таблиця 1

| Тело | Положение оси вращения | Момент инерции |
|---|---|---|
| Полый тонкостенный цилиндр радиусом $R$ | Ось симметрии | $mR^2$ |
| Сплошной цилиндр или диск радиусом $R$ | То же | $^1/_2\, mR^2$ |
| Прямой тонкий стержень длиной $l$ | Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину | $^1/_{12}\, ml^2$ |
| Прямой тонкий стержень длиной $l$ | Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец | $^1/_3\, ml^2$ |
| Шар радиусом $R$ | Ось проходит через центр шара | $^2/_5\, mR^2$ |

### § 17. Кінетична енергія обертання

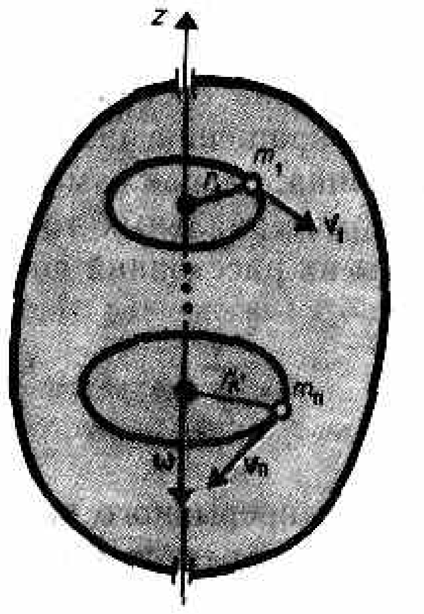

Рис. 24

Розглянемо абсолютно тверде тіло (див. §1), що обертається навколо нерухомої осі z, що проходить через нього (рис. 24). Подумки розіб'ємо це тіло на маленькі об'єми з елементарними масами $m_1$, $m_2$, ..., $m_n$, що знаходяться на відстані $r_1$, $r_2$, ..., $r_n$ від осі обертання. При обертанні твердого тіла відносно нерухомої осі окремі його елементарні об'єми масами $m_i$, опишуть кола різних радіусів $r_i$ і мають різні лінійні швидкості $v_i$. Але оскільки ми розглядаємо абсолютно тверде тіло, то кутова швидкість обертання цих об'ємів однакова:

$$\omega = v_1/r_1 = v_2/r_2 = ... = v_n/r_n. \quad (17.1)$$

Кінетичну енергію тіла, яке обертається, знайдемо як суму кінетичних енергій його елементарних об'ємів:

$$T_{вр} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + ... + \frac{m_n v_n^2}{2},$$

або

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Використовуючи вираз (17.1), отримаємо

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

де $J_z$ - момент інерції тіла відносно осі Z. Таким чином, кінетична енергія обертаючогося тіла

$$T_{вр} = J_z \omega^2/2. \quad (17.2)$$

Порівнюючи формулу (17.2) з виразом (12.1) для кінетичної енергії тіла, що рухається поступально ($T = mv^2/2$), випливає, що момент інерції обертального руху - *міра* *інертності тіла*. Формула (17.2) справедлива для тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

У разі плоского руху тіла, наприклад циліндра, що скочується з похилої площини без ковзання, енергія руху складається з енергії поступального руху та енергії обертання:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2},$$

де $m$ - маса тіла, котиться; $v_c$ - швидкість центру мас тіла; $J_c$ - момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас; ω - кутова швидкість тіла.

### § 18. Момент сили. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла

**Моментом сили F відносно нерухомої точки** О називається фізична величина, що визначається векторним добутком радіуса-вектора **r**, проведеного з точки О в точку А прикладання сили, на силу **F** (рис. 25):

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{r} \times \vec{F}.$$

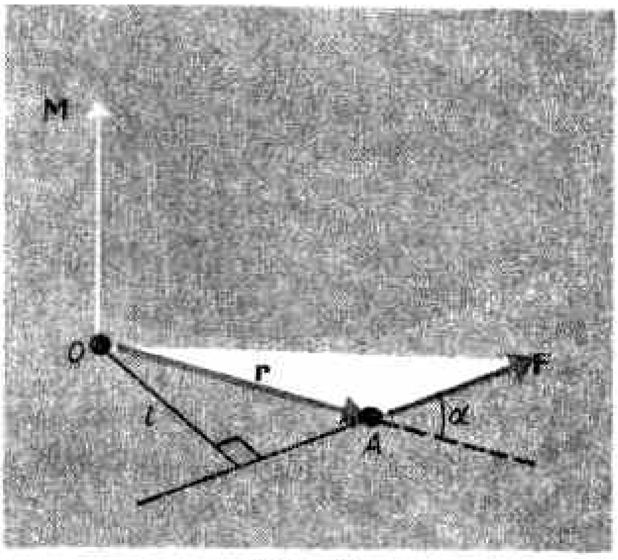

Рис. 25

Тут **M** - псевдовектор, його напрямок збігається з напрямком поступального руху правого гвинта при його обертанні від **r** до **F**.

Модуль моменту сили

$$M = Fr\sin\alpha = Fl, \quad (18.1)$$

де $\alpha$ - кут між **r** і **F**; $r\sin\alpha = l$ - найкоротша відстань між лінією дії сили і точкою О - **плече сили**.

**Моментом сили відносно нерухомої осі** z називається *скалярна* величина $M_z$, рівна проекції на цю вісь вектора **M** моменту сили, визначеного відносно довільної точки *O* даної осі Z (рис.26). Значення моменту $M_z$ не залежить від вибору положення точки О на осі z. Якщо вісь z збігається з напрямком вектора **M**, то момент сили представляється у вигляді вектора, що збігається з віссю:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}\vec{F}\right]_z.$$

Знайдемо вираз для роботи при обертанні тіла (рис.27). Нехай сила **F** прикладена в точці В, що знаходиться від осі обертання на відстані *r*, $\alpha$ - кут між напрямом сили і радіусом-вектором **r**. Оскільки тіло абсолютно тверде, то робота цієї сили дорівнює роботі, витраченій на поворот всього тіла. При повороті тіла на нескінченно малий кут $d\varphi$ точка прикладання В проходить шлях $ds = rd\varphi$, і робота дорівнює добутку проекції сили на напрямок зміщення на величину зміщення:

$$dA = F\sin\alpha r d\varphi. \quad (18.2)$$

Враховуючи (18.1), можемо записати $dA = M_z d\varphi$,
де $Fr\sin\alpha = Fl = M_z$ - момент сили відносно осі z. Таким чином, робота при обертанні тіла дорівнює добутку моменту діючої сили на кут повороту. Робота при обертанні тіла йде на збільшення його кінетичної енергії: dA = dT, але

$$dT = d\left(\frac{J_z\omega^2}{2}\right) = J_z\omega\, d\omega.$$

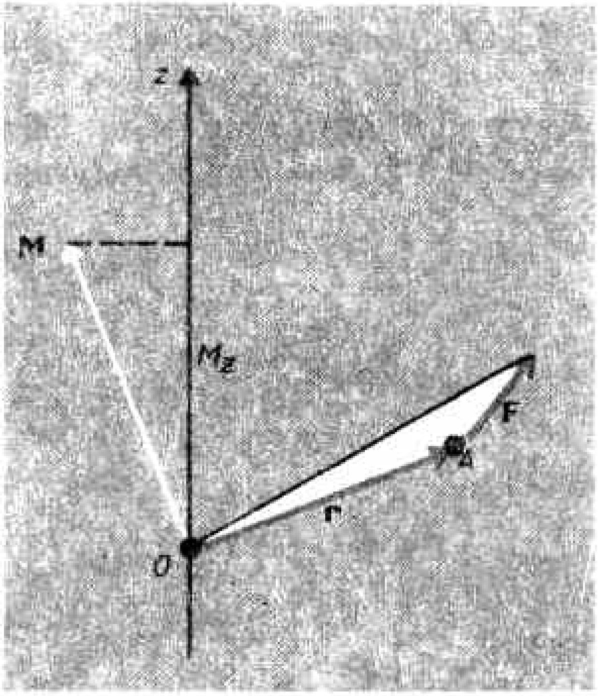

Рис. 26

Враховуючи, що $\omega = d\varphi/dt$, одержимо

$$M_z = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon. \quad (18.3)$$

Рівняння (18.3) являє собою **рівняння динаміки обертального руху твердого тіла** відносно нерухомої осі.

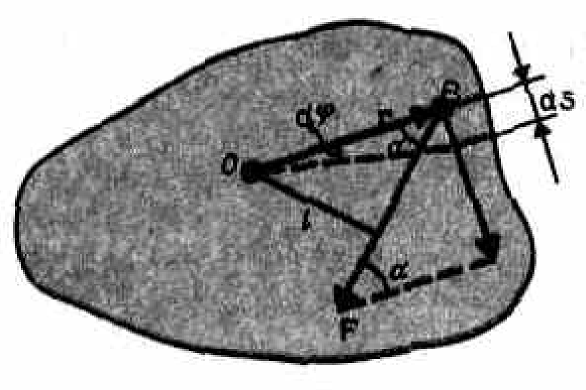


Рис. 27

Можна показати, що якщо вісь обертання збігається з головною віссю інерції (див. § 20), що проходить через центр мас, то має місце векторна рівність

$$\mathbf{M} = J\vec{\varepsilon}, \qquad (18.4)$$

де J - головний момент інерції тіла (момент інерції відносно головної осі).

### § 19. Момент імпульсу і закон його збереження

При порівнянні законів обертального і поступального рухів проглядається аналогія між ними, тільки в обертальному русі замість сили «виступає» її момент, роль маси відіграє момент інерції. Яка ж величина буде аналогом імпульсу тіла? Нею є момент імпульсу тіла відносно осі.

**Моментом імпульсу (кількості руху)** матеріальної точки А **відносно нерухомої точки** О називається фізична величина, що визначається векторним добутком:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}\,\vec{p}\right] = \left[\vec{r}m\vec{v}\right],$$

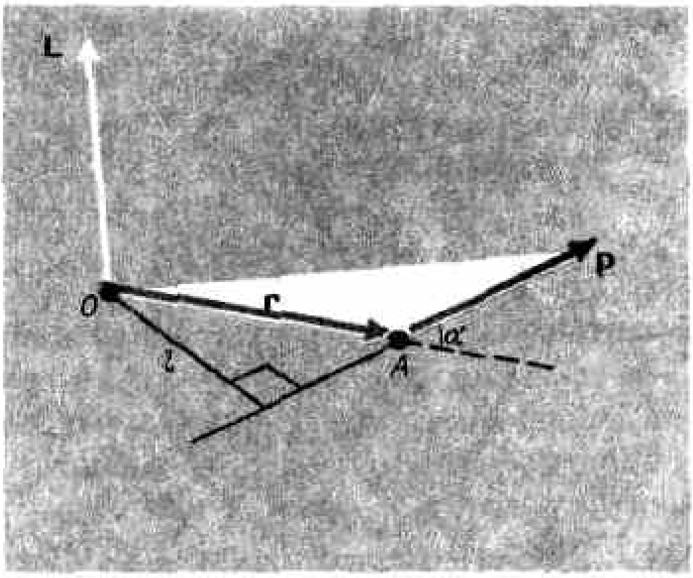


Рис. 28

де **r** - радіус-вектор, проведений з точки О в точку А; **p** = m**v** - імпульс матеріальної точки (рис.28); **L**-псевдовектор, його напрямок збігається з напрямком поступального руху правого гвинта при його обертанні від **r** до **p**. Модуль вектора моменту імпульсу

$$L = rp\sin\alpha = mvr\sin\alpha = pl,$$

де $\alpha$ - кут між векторами **r** і **p**, $l$ - плече вектора **p** відносно точки О.

**Моментом імпульсу відносно нерухомої осі** z називається скалярна величина $L_z$, рівна проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу, визначеного відносно довільної точки О даної осі. Значення моменту імпульсу $L_z$ не залежить від положення точки О на осі z.

При обертанні абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі z кожна окрема точка тіла рухається по колу постійного радіусу $r_i$ з деякою швидкістю $v_i$ і імпульсом $m_i v_i$, перпендикулярних до цього радіусу, тобто радіус є плечем вектора $m_i\mathbf{v}_i$. Тому можемо записати, що момент імпульсу окремої частки

$$L_{iz} = m_i v_i r_i \quad (19.1)$$

і спрямований по осі в сторону, яка визначається правилом правого гвинта.

**Момент імпульсу твердого тіла** відносно осі є сума моментів імпульсу окремих частинок:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i.$$

Використовуючи формулу (17.1) $v_i = \omega r_i$, одержимо

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z\omega,$$

тобто

$$L_z = J_z\omega. \quad (19.2)$$

Таким чином, момент імпульсу твердого тіла відносно осі дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно тієї ж осі на кутову швидкість.

Продиференцюємо рівняння (19.2) за часом:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon = M_z,$$

тобто

$$dL_z/dt = M_z$$

Цей вираз - ще одна форма **рівняння (закону) динаміки обертального руху твердого тіла** відносно нерухомої осі: похідна моменту імпульсу твердого тіла відносно осі дорівнює моменту сил відносно тієї ж осі.

Можна показати, що має місце векторна рівність

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}. \qquad (19.3)$$

У замкнутій системі момент зовнішніх сил $\mathbf{M}$=0 і $d\mathbf{L}/dt = 0$, звідки

$$\mathbf{L} = \text{const}. \ (19.4)$$

Вираз (19.4) являє собою закон **збереження моменту імпульсу**: момент імпульсу замкнутої системи зберігається, тобто не змінюється з часом.

## Лекція 6

## Закон збереження моменту імпульсу

Закон збереження моменту імпульсу - *фундаментальний закон природи*, Він пов'язаний з властивістю симетрії простору - його *ізотропності*, тобто з інваріантністю фізичних законів відносно вибору напрямку осей координат системи відліку (відносно повороту замкнутої системи в просторі на будь-який кут).

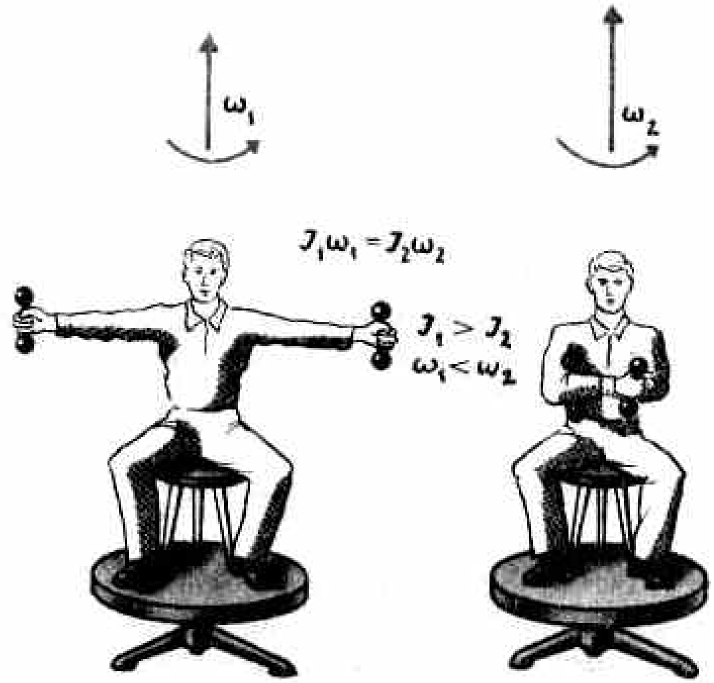


Рис. 29

Продемонструвати закон збереження моменту імпульсу можна за допомогою лави Жуковського. Нехай людину, що сидить на лаві, яка без тертя обертається навколо вертикальної осі, і тримає у витягнутих руках гантелі (рис. 29), обертають з кутовою швидкістю $\omega_1$. Якщо людина притисне гантелі до себе, то момент інерції системи зменшиться. Оскільки момент зовнішніх сил дорівнює нулю, момент імпульсу системи зберігається і кутова швидкість обертання $\omega_2$ зростає. Аналогічно, гімнаст під час стрибка через голову підтискає до тулуба руки і ноги, щоб зменшити свій момент інерції і збільшити тим самим кутову швидкість обертання.

Зіставимо основні величини і рівняння, що визначають обертання тіла навколо нерухомої осі і його поступальний рух (табл.2).

Таблица 2

| Поступательное движение | | Вращательное движение | |
|---|---|---|---|
| Масса | $m$ | Момент инерции | $J$ |
| Скорость | $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ | Угловая скорость | $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ |
| Ускорение | $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ | Угловое ускорение | $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ |
| Сила | $\mathbf{F}$ | Момент силы | $M_z$ или $\mathbf{M}$ |
| Импульс | $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ | Момент импульса | $L_z = J_z\omega$ |
| Основное уравнение динамики | $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; | Основное уравнение динамики | $M_z = J_z\varepsilon$; |
| | $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ | | $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ |
| Работа | $dA = F_s\, ds$ | Работа вращения | $M_z\, d\varphi$ |
| Кинетическая энергия | $mv^2/2$ | Кинетическая энергия вращения | $J_z\omega^2/2$ |

## § 20. Вільні осі. Гіроскоп

Для того щоб зберегти положення осі обертання твердого тіла з плином часу незмінним, використовують підшипники, в яких вона утримується. Однак існують такі осі обертання тіл, які не змінюють свою орієнтацію в просторі без дії на неї зовнішніх сил. Ці осі називаються **вільними осями** (або **осями вільного обертання**). Можна довести, що в будь-якому тілі існують три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр мас тіла, які можуть служити вільними осями (вони називаються **головними осями інерції** тіла). Наприклад, головні осі інерції однорідного прямокутного паралелепіпеда проходять через центри протилежних граней (рис. 30). Для однорідного циліндра однією з головних осей інерції є його геометрична вісь, а в якості інших осей можуть бути дві будь-які взаємно перпендикулярні осі, проведені через центр мас в площині, перпендикулярній геометричній осі циліндра. Головними осями інерції кулі є будь-які три взаємно

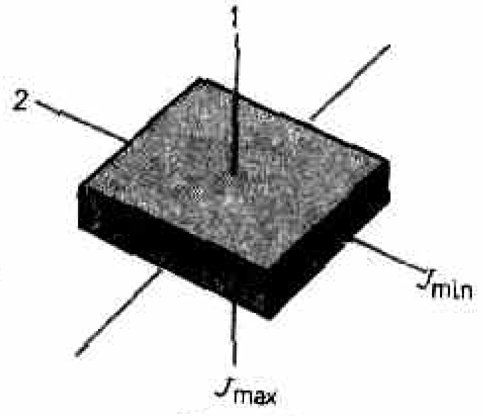

Рис. 30

перпендикулярні осі, що проходять через центр мас. Для стійкості обертання велике значення має, яка саме з вільних осей служить віссю обертання.

Можна показати, що обертання навколо головних осей з найбільшим і найменшим моментами інерції виявляється стійким, а обертання навколо осі з середнім моментом - нестійким. Так, якщо підкинути тіло, що має форму паралелепіпеда, привівши його одночасно в обертання, то воно, падаючи, буде стійко обертатися навколо осей 1 і 2 (рис. 30).

Якщо, наприклад, паличку підвісити за один кінець нитки, а інший кінець, закріплений до шпинделя відцентрової машини, привести в швидке обертання, то паличка буде обертатися в горизонтальній площині близько вертикальної осі, перпендикулярної осі палички і проходить через її середину (мал.31) . Це і є вільна вісь обертання (момент інерції при цьому положенні палички максимальний). Якщо тепер паличку, що обертається навколо вільної осі, звільнити від зовнішніх зв'язків (акуратно зняти верхній кінець нитки з гачка шпинделя), то положення осі обертання в просторі протягом деякого часу зберігається. Властивість вільних осей зберігати своє положення в просторі широко застосовується в техніці. Найбільш цікаві в цьому плані **гіроскопи** - масивні однорідні

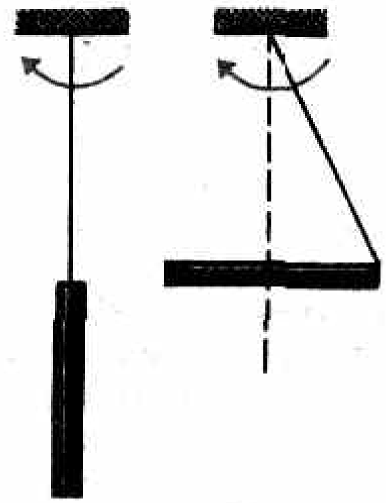

Рис. 31

тіла, що обертаються з великою кутовою швидкістю навколо своєї осі симетрії, яка є вільною віссю. Розглянемо один з різновидів гіроскопів - гіроскоп на кардановому підвісі (рис.32). Дископодібне тіло - гіроскоп - закріплено на осі АА, яка може обертатися навколо перпендикулярної їй горизонтальної осі ВВ, яка, в свою чергу, може повертатися навколо вертикальної осі DD. Всі три осі перетинаються в одній точці С, що є центром мас гіроскопа і залишається нерухомою, а вісь гіроскопа може прийняти будь-який напрямок в просторі. Силами тертя в підшипниках всіх трьох осей і моментом імпульсу кілець нехтуємо.

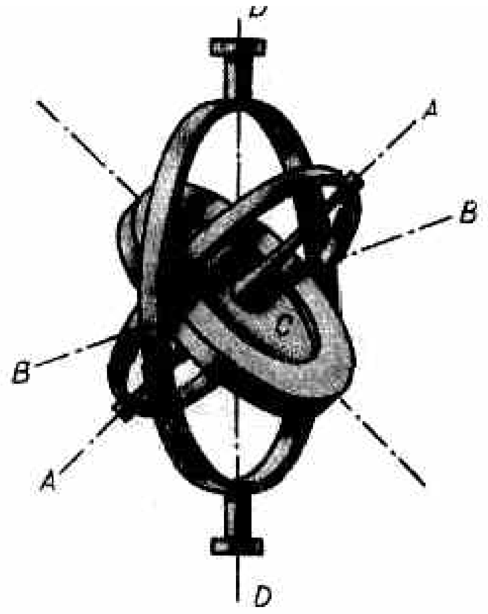

Рис. 32

Оскільки тертя в підшипниках мале, то, поки гіроскоп нерухомий, його осі можна надати будь-який напрямок. Якщо почати гіроскоп швидко обертати (наприклад, за допомогою намотаної на вісь мотузочки) і повертати його підставку, то вісь гіроскопа зберігає своє положення в просторі незмінним. Це можна пояснити за допомогою основного закону динаміки обертального руху. Для вільного обертового гіроскопа сила тяжіння не може змінити орієнтацію його осі обертання, оскільки ця сила прикладена до центру мас (центр обертання C збігається з центром мас), а момент сили тяжіння відносно закріпленого центра мас дорівнює нулю. Моментом сил тертя ми також нехтуємо. Тому якщо момент зовнішніх сил відносно його закріпленого центра мас дорівнює нулю, то, як випливає з рівняння (19.3), $\mathbf{L}$ = const, тобто момент імпульсу гіроскопа зберігає свою величину і напрям в просторі. Отже, разом з ним зберігає своє положення в просторі і вісь гіроскопа.

Щоб вісь гіроскопа змінила свій напрям в просторі, необхідна, згідно (19.3), відмінність від нуля моменту зовнішніх сил. Якщо момент зовнішніх сил, прикладених до обертаючогося гіроскопа відносно його центру мас, відмінний від нуля, то спостерігається явище, що отримало назву **гіроскопічного ефекту**. Воно полягає в тому, що під дією пари сил $\mathbf{F}$, прикладеної до осі обертаючогося гіроскопа, вісь гіроскопа (рис. 33) повертається навколо прямої $O_3O_3$, а не навколо прямої $O_2O_2$, як це здавалося б природним на перший погляд ($O_1O_1$ і $O_2O_2$ лежать в площині рисунку, а $O_3O_3$ і сили F перпендикулярні їй).

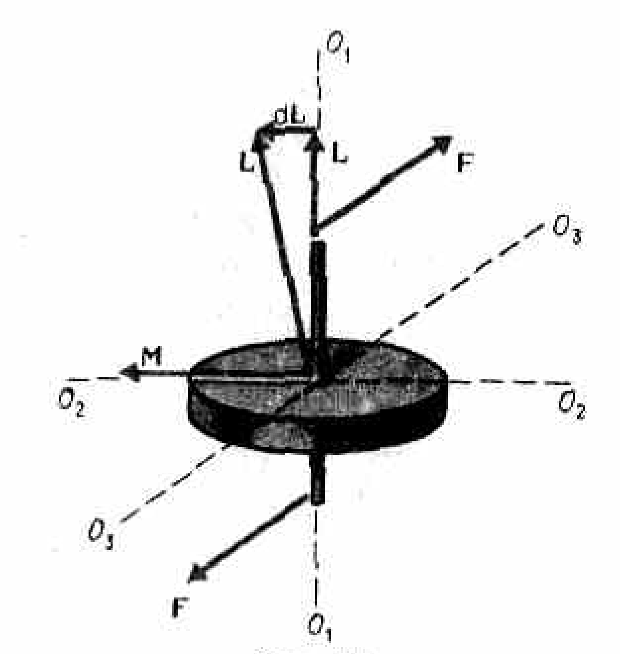

Рис. 33

Гіроскопічний ефект пояснюється наступним чином. Момент **M** пари сил **F** спрямований вздовж прямої $O_2O_2$. За час dt момент імпульсу **L** гіроскопа отримає приріст d**L** = **M**dt (напрям d**L** збігається з напрямком **M**) і стане рівним **L**'=**L**+d**L**. Напрямок вектора **L**' збігається з новим напрямком осі обертання гіроскопа. Таким чином, вісь обертання гіроскопа повернеться навколо прямої $O_3O_3$. Якщо час дії сили малий, то, хоча момент сил **M** і великий, зміна моменту імпульсу d**L** гіроскопа буде також досить малою. Тому короткочасна дія сил практично не призводить до зміни орієнтації осі обертання гіроскопа в просторі. Для її зміни слід прикладати сили протягом тривалого часу.

Якщо вісь гіроскопа закріплена підшипниками, то внаслідок гіроскопічного ефекту виникають так звані гіроскопічні сили, що діють на опори, в яких обертається вісь гіроскопа. Їх дію необхідно враховувати при конструюванні пристроїв, що містять масивні складові частини, які швидко обертаються. Гіроскопічні сили мають сенс тільки в системі відліку, що обертається і є окремим випадком коріолісової сили інерції (див. § 27).

Гіроскопи застосовуються в різних гіроскопічних навігаційних приладах (гірокомпас, гірогорізонт і т. д.). Інше важливе застосування гіроскопів - підтримання заданого напрямку руху транспортних засобів, наприклад судна (авторульового) і літака (автопілот) і т. д. При всякому відхиленні від курсу внаслідок якихось впливів (хвилі, пориву вітру і т. д.) положення осі гіроскопа в просторі зберігається. Отже, вісь гіроскопа разом з рамами карданова підвісу повертається відносно рухомого пристрою. Поворот рам карданова підвісу за допомогою певних пристосувань включає рулі управління, які повертають рух до заданого курсу.

Вперше гіроскоп був застосований французьким фізиком Ж. Фуко (1819-1868) для доказу обертання Землі.

## § 21. Деформації твердого тіла

Розглядаючи механіку твердого тіла, ми користувалися поняттям абсолютно твердого тіла. Проте в природі абсолютно твердих тіл немає, оскільки всі реальні тіла під дією сил змінюють свою форму і розміри, тобто деформуються.

**Деформація** називається **пружною**, якщо після припинення дії зовнішніх сил тіло приймає початкові розміри і форму. Деформації, які зберігаються в тілі після припинення дії зовнішніх сил, називаються **пластичними** (або **залишковими**). Деформації реального тіла завжди пластичні, оскільки вони після припинення дії зовнішніх сил ніколи повністю не зникають. Однак якщо залишкові деформації малі, то ними можна знехтувати і розглядати пружні деформації, що ми і будемо робити.

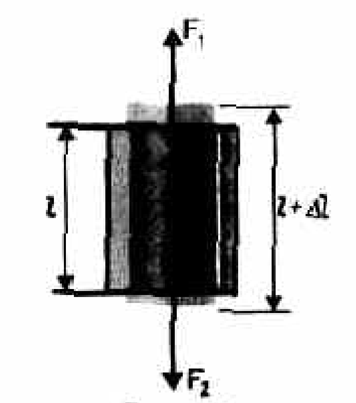


Рис. 34

В теорії пружності доводиться, що всі види деформацій (розтягнення або стиснення, зсув, вигин, крутіння) можуть бути зведені до одночасно відбуваючихся деформацій розтягнення чи стиснення та зсуву.

Розглянемо однорідний стрижень довжиною l і площею поперечного перерізу S (рис. 34), до кінців якого прикладені спрямовані уздовж його осі сили $\mathbf{F}_1$ і $\mathbf{F}_2$ ($F_1=F_2=F$), в результаті чого довжина стрижня змінюється на величину $\Delta l$. Природньо, що при розтягуванні $\Delta l$ позитивна, а при стисканні - негативна.

Сила, що діє на одиницю площі поперечного перерізу, називається **напругою**:

$$\sigma = F/S. \quad (21.1)$$

Якщо сила спрямована по нормалі до поверхні, **напруга** називається **нормальною**, якщо ж по дотичній до поверхні - **тангенціальною**. Кількісною мірою, яка характеризує ступінь деформації, що зазнає тіло, є його **відносна деформація**. Так, відносна зміна довжини стрижня (поздовжня деформація)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \qquad (21.2)$$

відносне поперечне розтягування (стиснення)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

де d - діаметр стрижня.

Деформації $\varepsilon$ і $\varepsilon'$ завжди мають різні знаки (при розтягуванні $\Delta l$ позитивно, а $\Delta d$ негативно, при стисненні $\Delta l$ негативно, а $\Delta d$ позитивно). З досвіду випливає взаємозв'язок $\varepsilon$ і $\varepsilon'$:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon,$$

де $\mu$ - позитивний коефіцієнт, що залежить від властивостей матеріалу, і називається **коефіцієнтом Пуассона**. Англійський фізик Р. Гук (1635 - 1703) експериментально встановив, що для малих деформацій відносне подовження $\varepsilon$ і напруга $\sigma$ прямо пропорційні одне одному:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (21.3)$$

де коефіцієнт пропорційності E називається **модулем Юнга**. З виразу (21.3) видно, що модуль Юнга визначається напругою, яка викликає відносне подовження, рівне одиниці. З формул (21.2), (21.3) і (21.1) випливає, що

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES},$$

*или*

$$F = \frac{ES}{l}\Delta l = k\Delta l, \qquad (21.4)$$

де **k - коефіцієнт пружності**. Вираз (21.4) також задає закон Гука, згідно з яким подовження стрижня при пружній деформації пропорційне діючій на стрижень силі.

Деформації твердих тіл підкоряються закону Гука до певної межі. Зв'язок між деформацією і напругою представляється у вигляді діаграми напруг, яку ми якісно розглянемо для металевого зразка (рис. 35). З рисунка видно, що лінійна залежність $\sigma(\varepsilon)$, встановлена Гуком, виконується лише в дуже вузьких межах до так званої **межі пропорційност**і ($\sigma_п$). При подальшому збільшенні напруги деформація ще пружна (хоча залежність $\sigma(\varepsilon)$ вже не лінійна) і до **межі пружності** ($\sigma_у$) залишкові деформації не виникають. За межею пружності в тілі виникають залишкові деформації і графік, що описує повернення тіла в первинний стан після припинення дії сили, зобразиться не кривою ВО, а паралельною їй - CF. Напруга, при якій з'являється помітна залишкова деформація ($\cong 0{,}2\%$), називається **межею плинності** ($\sigma_т$) - точка С на кривій. В області CD деформація зростає без збільшення напруги, тобто тіло як би «тече». Ця область називається **областю плинності** (або **областю пластичних деформацій**). Матеріали, для яких область плинності значна, називаються **в'язкими**, для яких вона практично відсутня - **крихкими**. При подальшому розтяганні (за точку D) відбувається руйнування тіла. Максимальна напруга, що виникає в тілі до руйнування, називається **межею міцності** ($\sigma_р$).

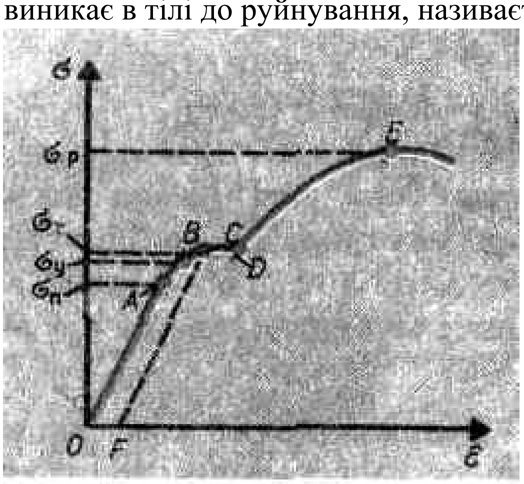

Рис. 35

Діаграма напруг для реальних твердих тіл залежить від різних факторів. Одне і те ж тверде тіло може при короткочасній дії сил проявляти себе як крихке, а при тривалих, але слабких силах є текучим.

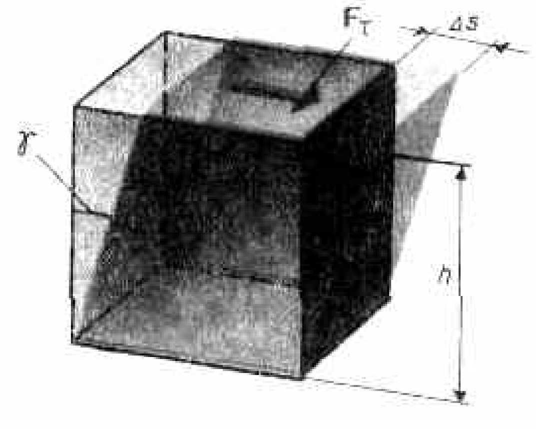


Рис. 36

Обчислимо потенціальну енергію пружнорозтянутого (стисненого) стрижня, яка дорівнює роботі, що здійснюється зовнішніми силами при деформації:

$$\Pi = A = \int_0^{\Delta l} F\,dx,$$

де $x$ - абсолютне подовження стрижня, що змінюється в процесі деформації від 0 до $\Delta l$. Відповідно до закону Гука (21.4), $F=kx=ESx/l$. Тому

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x\,dx = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2,$$

тобто потенціальна енергія пружнорозтянутого стрижня пропорційна квадрату деформації $\Delta l^2$. Деформацію зсуву найпростіше здійснити, якщо взяти брусок, що має форму прямокутного паралелепіпеда, і прикласти до нього силу $F_\tau$ (рис.36), дотичну до його поверхні (нижня частина бруска закріплена нерухомо). Відносна деформація зсуву визначається з формули

$$\text{tg}\gamma = \Delta s/h,$$

де $\Delta s$ - абсолютний зсув паралельних шарів тіла один відносно одного; h - відстань між шарами (для малих кутів $\text{tg}\gamma \approx \gamma$).

**Контрольні питання**

- Що таке момент інерції тіла?
- Яка роль моменту інерції в обертальному русі?
- Яка формула для кінетичної енергії тіла, що обертається навколо нерухомої осі, і як її вивести?
- Що називається моментом сили відносно нерухомої точки? відносно нерухомої осі? Як визначається напрямок моменту сили?
- Виведіть і сформулюйте рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.
- Що таке момент імпульсу матеріальної точки? твердого тіла? Як визначається напрямок моменту імпульсу?

- У чому полягає фізична суть закону збереження моменту імпульсу? В яких системах він виконується? Наведіть приклади.
- Якою властивістю симетрії простору обумовлюється справедливість закону збереження моменту імпульсу?
- Зіставте основні рівняння динаміки поступального і обертального рухів, прокоментувавши їх аналогію.
- Що таке вільні осі (головні осі інерції)? Які з них є стійкими?
- Що таке гіроскоп? Які його основні властивості?
- Сформулюйте закон Гука. Коли він справедливий?
- Дайте пояснення якісної діаграми напруг $\sigma(\varepsilon)$. Що таке межі пропорційності, пружності і міцності?
- Який фізичний зміст модуля Юнга?

**Задачі**

**4.1.** З одного рівня похилої площини одночасно починають скочуватися без ковзання суцільні циліндр і куля однакових мас і однакових радіусів. Визначити: 1) відношення швидкостей циліндра і кулі на даному рівні; 2) їх відношення в даний момент часу. [1) 14/15, 2) 14/15]

**4.2.** До ободу однорідного суцільного диска радіусом R = 0,5 м прикладена постійна дотична сила F = 100 Н. При обертанні диска на нього діє момент сил тертя M = 2 Н•м. Визначити масу *m* диска, якщо відомо, що його кутове прискорення $\varepsilon$ постійне і дорівнює 12 рад/с$^2$. [32 кг]

**4.3.** Через нерухомий блок у вигляді однорідного суцільного циліндра масою m=1кг перекинута невагома нитка, до кінців якої прикріплені тіла масами $m_1$ = 1 кг і $m_2$=2кг. Нехтуючи тертям в осі блоку, визначити: 1) прискорення вантажів; 2) відношення $T_2/T_1$ сил натягу нитки. [1) 2,8 м/с$^2$; 2) 1,11]

**4.4.** Швидкість обертання колеса, момент інерції якого 2 кг•м$^2$, що обертається при гальмуванні рівносповільнено, за час t = 1 хв зменшилася від $n_1$ = 300 об / хв до $n_2$= 180 об / хв. Визначити: 1) кутове прискорення $\varepsilon$ колеса; 2) момент М сили гальмування, 3) роботу сили гальмування. [1) 0,21 рад/с$^2$, 2) 0,42 Н • м, 3) 630 Дж]

**4.5.** Людина масою m = 80 кг, що стоїть на краю горизонтальної платформи масою M = 100 кг, що обертається за інерцією навколо нерухомої вертикальної осі з частотою $n_1$ = 10 хв$^{-1}$, переходить до її центру. Вважаючи платформу однорідним диском, а людину - точковою масою, визначити, з якою частотою $n_2$ буде обертатися платформа. [26 хв$^{-1}$]

**4.6.** Визначити відносне подовження алюмінієвого стрижня, якщо при його розтягуванні витрачена робота 621 Дж. Довжина стрижня 2 м, площа поперечного перерізу 1 мм$^2$, модуль Юнга для алюмінію E = 69 ГПа. ($\Delta l/l=\sqrt{[2A/(ESl)]}=0{,}03$)