МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Р.В. Захарченко, С.В. Пальцун

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З МЕХАНІКИ ТА МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ

Рукопис

«ЕК» НТУУ “КПІ”, 2012

Р.В. Захарченко, С.В. Пальцун. Конспект лекцій з механіки та молекулярної фізики [Електронний ресурс]: рукоп. видан. для студентів енергетичних спеціальностей НТУУ “КПІ”, «ЕК» НТУУ “КПІ”, 2012 – 174 с.

Навчальний посібник за змістом відповідає стандартному курсу лекцій з механіки та молекулярної фізики і термодинаміки, який включає розділи від кінематики і динаміки точки до спеціальної теорії відносності і основ термодинаміки та молекулярно кінетичної теорії. Особливу увагу приділено встановленню основних понять механіки, аналізу експериментальних фактів та математичному формулюванню фундаментальних законів. Це безумовно сприятиме формуванню у читача матеріалістичного світогляду.

Для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Зміст

Фізичні основи механіки

Лекція 4

Закон збереження енергії

§ 11. Енергія, робота, потужність

Енергія - універсальна міра різних форм руху і взаємодії. З різними формами руху матерії пов'язують різні форми енергії: механічну, теплову, електромагнітну, ядерну та ін. В одних явищах форма руху матерії не змінюється (наприклад, гаряче тіло нагріває холодне), в інших - переходить в іншу форму (наприклад, в результаті тертя механічний рух перетворюється в тепловий). Однак суттєво, що у всіх випадках енергія, віддана (в тій чи іншій формі) одним тілом іншому тілу, дорівнює енергії, отриманій останнім тілом.

Зміна механічного руху тіла викликається силами, що діють на нього з боку інших тіл. Щоб кількісно характеризувати процес обміну енергією між взаємодіючими тілами, в механіці вводиться поняття **роботи сили**.

Якщо тіло рухається *прямолінійно* і на нього діє постійна сила **F**, напрямок якої утворює певний кут α з напрямком переміщення, то робота цієї сили дорівнює добутку проекції сили F_s на напрям переміщення ($F_s = F\cos\alpha$), помноженої на переміщення точки прикладання сили:

$$A = F_s s = F_s \cos\alpha. \qquad (11.1)$$

У загальному випадку сила може змінюватися як за модулем, так і за напрямком, тому формулою (11.1) користуватися не можна. Якщо, однак, розглянути елементарне переміщення dr, то силу **F** можна вважати постійною, а рух точки її прикладання – прямолінійним.

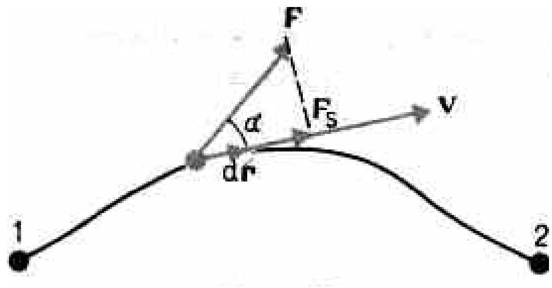

Рис. 13

Елементарною роботою сили **F** на переміщенні d**r** називається *скалярна* величина

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F\cos\alpha \cdot ds = F_s ds,$$

де α - кут між векторами **F** і d**r**; ds = | d**r** | - елементарний шлях; F_s - проекція вектора **F** на вектор d**r** (рис. 13).

Робота сили на ділянці траєкторії від точки 1 до точки 2 дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт на окремих нескінченно малих ділянках шляху. Ця сума приводиться до інтегралу

$$A = \int_1^2 F ds \cos\alpha = \int_1^2 F_s ds. \qquad (11.2)$$

Для обчислення цього інтеграла треба знати залежність сили F_s від шляху s вздовж траєкторії *1-2*. Нехай ця залежність представлена графічно (рис. 14), тоді шукана робота A визначається на графіку площею зафарбованої фігури. Якщо, наприклад, тіло рухається прямолінійно, сила F=const і α =const, то отримаємо

$$A = \int_1^2 F\, ds \cos\alpha = F\cos\alpha \int_1^2 ds = Fs\cos\alpha,$$

де s - пройдений тілом шлях (див. також формулу (11.1)).

З формули (11.1) випливає, що при $\alpha < \pi / 2$ робота сили позитивна, в цьому випадку складова $\mathbf{F}_s$ збігається за напрямком з вектором швидкості руху **v** (див. рис. 13).

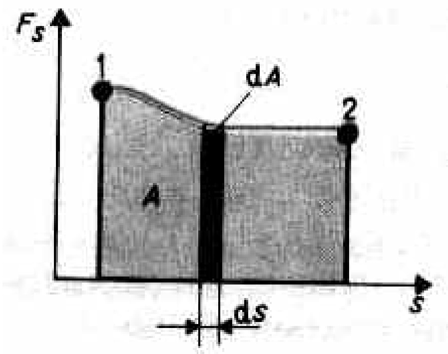

Рис. 14

Якщо $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$, то робота сили негативна. При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (сила спрямована перпендикулярно переміщенню) робота сили дорівнює нулю.

Одиниця роботи - **джоуль** (Дж): 1 Дж - робота, що здійснюється силою в 1 Н на шляху в 1 м (1 Дж = 1 Н • м).

Щоб охарактеризувати швидкість здійснення роботи, вводять поняття потужності:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (11.3)$$

За час dt сила **F** здійснює роботу **F**d**r**, і потужність, що розвивається цією силою, в даний момент часу

$$N = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

тобто дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості, з якою рухається точка прикладання цієї сили; N - величина *скалярна*.

Одиниця потужності - **ват** (Вт): 1 Вт - потужність, при якій за час 1 с здійснюється робота в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж / с).

§ 12. Кінетична і потенціальна енергії

Кінетична енергія механічної системи - це енергія механічного руху цієї системи.

Сила **F**, діючи на тіло, що покоїться, і викликаючи його рух, здійснює роботу, а енергія рухомого тіла зростає на величину витраченої роботи. Таким чином, робота *dA* сили **F** на шляху, який тіло пройшло за час зростання швидкості від 0 до v, йде на збільшення кінетичної енергії *dT* тіла, тобто

$$dA = dT$$

Використовуючи другий закон Ньютона **F** = md**v**/dt і домножуючи обидві частини рівності на переміщення d**r**, одержимо

$$\vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = md\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v} = dA = mv\ dv = dT,$$

звідки

$$T = \int_0^v mv\ dv = \frac{mv^2}{2}. \qquad (12.1)$$

Таким чином, тіло масою m, що рухається зі швидкістю v, має кінетичну енергію, що описується формулою (12.1). З формули (12.1) видно, що кінетична енергія залежить тільки від маси і швидкості тіла, тобто кінетична енергія системи є функція стану її руху.

При виведенні формули (12.1) передбачалося, що рух розглядається в інерціальній системі відліку, тому що інакше не можна було б використовувати закони Ньютона. У різних інерціальних системах відліку, що рухаються одна відносно одної, швидкість тіла, а отже, і його кінетична енергія будуть неоднакові. Таким чином, кінетична енергія залежить від вибору системи відліку.

Потенціальна енергія - механічна енергія системи тіл, що визначається їх взаємним розташуванням і характером сил взаємодії між ними.

Нехай взаємодія тіл здійснюється за допомогою силових полів (наприклад, поля пружних сил, поля гравітаційних сил), що характеризуються тим, що робота, здійснювана діючими силами при переміщенні тіла з одного положення в інше, не залежить від того, по якій траєкторії це переміщення відбулося, а залежить тільки від початкового і кінцевого положень. Такі поля називаються **потенціальними**, а сили, що діють в них, - **консервативними**. Якщо ж робота, що здійснюється силою, залежить від траєкторії переміщення тіла з однієї точки в іншу, то така сила називається **дисипативною**; її прикладом є сила тертя.

Тіло, перебуваючи в потенціальному полі сил, володіє потенціальною енергією П. Робота консервативних сил при елементарній (нескінченно малій) зміні конфігурації системи дорівнює приросту потенціальної енергії, взятому зі знаком мінус, тому що робота здійснюється за рахунок зменшення потенціальної енергії:

$$dA = -d\Pi. \qquad (12.2)$$

Робота dA виражається як скалярний добуток сили **F** на переміщення d**r** і вираз (12.2) можна записати у вигляді

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\Pi. \qquad (12.3)$$

Отже, якщо відома функція П (**r**), то з формули (12.3) можна знайти силу **F** по модулю і напрямку.

Потенціальна енергія може бути визначена виходячи з (12.3) як

$$\Pi = -\int \vec{F}d\vec{r} + C,$$

де C - стала інтегрування, тобто потенціальна енергія визначається з точністю до деякої довільної сталої. Це, однак, не відбивається на фізичних законах, оскільки в них входить або різниця потенціальних енергій у двох положеннях тіла, або похідна П за координатами. Тому потенціальну енергію тіла в якомусь певному положенні вважають рівною нулю (вибирають нульовий рівень відліку), а енергію тіла в інших положеннях відраховують відносно нульового рівня. Для консервативних сил

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

або у векторному вигляді

$$\vec{F} = -grad\Pi, \qquad (12.4)$$

$$grad\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k} \qquad (12.5)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти, або одиничні вектори координатних вісей.

Вектор, який визначається виразом (12.5), називається **градієнтом скаляра П**. Для нього поряд з позначенням grad П застосовується також позначення $\nabla\Pi$. ∇(«набла») означає символічний вектор, який називають **оператором Гамільтона або набла-оператором**:

$$grad = \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (12.6)$$

Конкретний вид функції П залежить від характеру силового поля. Наприклад, потенціальна енергія тіла масою m, піднятого на висоту h над поверхнею Землі, дорівнює

$$\Pi = mgh, \quad (12.7)$$

де висота h відраховується від нульового рівня, для якого $\Pi_0 = 0$. Вираз (12.7) випливає безпосередньо з того, що потенціальна енергія дорівнює роботі сили тяжіння при падінні тіла з висоти h на поверхню Землі.

Оскільки початок відліку вибирається довільно, то потенціальна енергія може мати негативне значення (*кінетична енергія завжди позитивна!*). Якщо прийняти за нуль потенціальну енергію тіла, що лежить на поверхні Землі, то потенціальна енергія тіла, що знаходиться на дні шахти (глибина h'), П =-mgh '.

Знайдемо потенціальну енергію пружнодеформованого тіла (пружини). Сила пружності пропорційна деформації:

$$F_{x\ пруж} = -kx,$$

де $F_{x\ пруж}$ - проекція сили пружності на вісь *x*; k - **коефіцієнт пружності** (для пружини - **жорсткість**), а знак мінус вказує, що $F_{x\ пруж}$ напрямлена в сторону, протилежну деформації *x*. За третім законом Ньютона, деформуюча сила дорівнює по модулю силі пружності і протилежно їй спрямована, тобто

$$F_x = -F_{x\ пруж} = kx.$$

Елементарна робота dA, що здійснюється силою F_x при нескінченно малій деформації dx, дорівнює

$$dA = F_x\ dx = kx\ dx, \quad \text{а повна робота} \quad A = \int_0^x kx\ dx = \frac{kx^2}{2}$$

йде на збільшення потенціальної енергії пружини. Таким чином, потенціальна енергія пружнодеформованого тіла

$$П = \frac{kx^2}{2}$$

Потенціальна енергія системи, подібно до кінетичної енергії, є функцією стану системи. Вона залежить тільки від конфігурації системи та її положення по відношенню до зовнішніх тіл.

Повна механічна енергія системи - енергія механічного руху і взаємодії:

$$E = E_к + П,$$

тобто дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій.

§ 13. Закон збереження енергії

Закон збереження енергії - результат узагальнення багатьох експериментальних даних. Ідея цього закону належить М. В. Ломоносову (1711 -1765), що виклав закон збереження матерії і руху, а кількісне формулювання закону збереження енергії було дано німецьким лікарем Ю. Маєром (1814-1878) і німецьким природодослідником Г. Гельмгольцем (1821 - 1894) .

Розглянемо систему матеріальних точок масами m_1, m_2, ..., m_n, що рухаються зі швидкостями v_1, v_2, ..., v_n. Нехай $\mathbf{F}'_1$, $\mathbf{F}'_2$, ..., $\mathbf{F}'_n$ - рівнодіюча внутрішніх консервативних сил, що діють на кожну з цих точок, а $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ - рівнодіюча зовнішніх сил, які також будемо вважати консервативними. Крім того, будемо вважати, що на матеріальні точки діють ще й зовнішні неконсервативні сили; рівнодіюча цих сил, що діють на кожну з матеріальних точок, позначимо $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$. При $v << c$ маси матеріальних точок постійні і рівняння другого закону Ньютона для цих точок наступні:

$$m_1 \frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} = \overrightarrow{F'_1} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{f_1},$$

$$m_2 \frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt} = \overrightarrow{F'_2} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{f_2},$$

....

$$m_n \frac{d\overrightarrow{v_n}}{dt} = \overrightarrow{F'_n} + \overrightarrow{F_n} + \overrightarrow{f_n}.$$

Рухаючись під дією сил, точки системи за інтервал часу dt здійснюють переміщення, відповідно рівні $d\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_2$, ..., $d\mathbf{r}_n$. Помножимо кожне з рівнянь скалярно на відповідне переміщення і, враховуючи, що $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$, отримаємо:

$$m_1(\mathbf{v}_1\, d\mathbf{v}_1) - (\mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_1)\, d\mathbf{r}_1 = \mathbf{f}_1\, d\mathbf{r}_1,$$
$$m_2(\mathbf{v}_2\, d\mathbf{v}_2) - (\mathbf{F}_2' + \mathbf{F}_2)\, d\mathbf{r}_2 = \mathbf{f}_2\, d\mathbf{r}_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$m_n(\mathbf{v}_n\, d\mathbf{v}_n) - (\mathbf{F}_n' + \mathbf{F}_n)\, d\mathbf{r}_n = \mathbf{f}_n\, d\mathbf{r}_n.$$

Додавши ці рівняння, одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{v}_i\, d\mathbf{v}_i) - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i' + \mathbf{F}_i)\, d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i\, d\mathbf{r}_i. \qquad (13.1)$$

Перший член лівої частини рівності (13.1)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{v}_i\, d\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} d(m_i \mathbf{v}_i^2/2) = dT,$$

де dT є приріст кінетичної енергії системи. Другий член

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i' + \mathbf{F}_i)\, d\mathbf{r}_i$$

дорівнює елементарній роботі внутрішніх і зовнішніх консервативних сил, взятої зі знаком мінус, тобто дорівнює елементарному приросту потенціальної енергії dП системи (див. (12.2)). Права частина рівності (13.1) задає роботу зовнішніх неконсервативних сил, діючих на систему. Таким чином, маємо

$$d(T + \Pi) = dA. \qquad (13.2)$$

При переході системи із стану 1 в який-небудь стан 2

$$\int_1^2 d(T + \Pi) = A_{12},$$

тобто зміна повної механічної енергії системи при переході з одного стану в інший дорівнює роботі, здійсненій при цьому зовнішніми неконсервативними силами. Якщо зовнішні неконсервативні сили відсутні, то з (13.2) випливає, що

$$d(T + \Pi) = 0,$$

звідки

$$T + П = E = const, (13.3)$$

тобто повна механічна енергія системи зберігається сталою. Вираз (13.3) являє собою **закон збереження механічної енергії**: в системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, повна механічна енергія зберігається, тобто не змінюється з часом.

Механічні системи, на тіла яких діють тільки консервативні сили (внутрішні і зовнішні), називаються **консервативними системами**.

Закон збереження механічної енергії можна сформулювати так: *у консервативних системах повна механічна енергія зберігається.* Закон збереження механічної енергії пов'язаний з *однорідністю часу*, тобто інваріантністю фізичних законів відносно вибору початку відліку часу. Наприклад, при вільному падінні тіла в полі сил тяжіння його швидкість і пройдений шлях залежать лише від початкової швидкості і тривалості вільного падіння тіла і не залежать від того, коли тіло почало падати.

Існує ще один вид систем - **дисипативні системи**, в яких механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в інші (немеханічні) форми енергії. Цей процес отримав назву **дисипації** (або **розсіяння**) **енергії**. Суворо кажучи, всі системи в природі є дисипативними.

В консервативних системах повна механічна енергія залишається сталою. Можуть відбуватися лише перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки в еквівалентних кількостях, так що повна енергія залишається незмінною. Тому, як вказує Ф. Енгельс, цей закон не є просто закон *кількісного* збереження енергії, а закон збереження і перетворення енергії, що виражає і *якісну* сторону взаємного перетворення різних форм руху один в одного. Закон збереження і перетворення енергії - *фундаментальний закон природи*, він справедливий як для систем макроскопічних тіл, так і для систем мікрочастинок. У системі, в якій діють також неконсервативні сили, наприклад сили тертя, повна механічна енергія системи не зберігається. Отже, в цих випадках закон збереження механічної енергії несправедливий. Однак при «зникненні» механічної енергії завжди виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду. Таким чином, *енергія ніколи не зникає і не з'являється знову, вона лише перетворюється з одного виду в інший*. В цьому і полягає *фізична сутність* закону збереження і перетворення енергії - сутність незнищенності матерії та її руху.

§ 14. Графічне представлення енергії

У багатьох задачах розглядається одномірний рух тіла, потенціальна енергія якого є функцією лише однієї змінної (наприклад, координати x), тобто $П=П(x)$. Графік залежності потенціальної енергії від деякого аргументу називається **потенціальною кривою**. Аналіз потенціальних кривих дозволяє визначити характер руху тіла.

Будемо розглядати тільки консервативні системи, тобто системи, в яких взаємні перетворення механічної енергії в інші види відсутні.

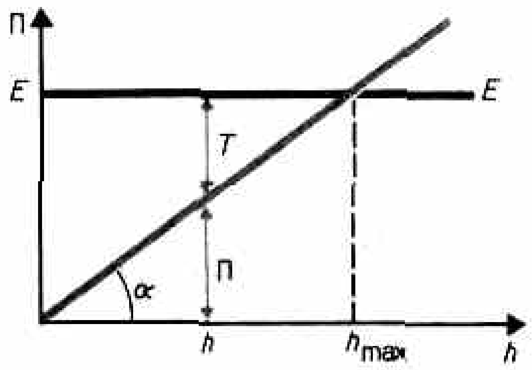

Рис. 15

Тоді справедливий закон збереження енергії в формі (13.3). Розглянемо графічне представлення потенціальної енергії для тіла в однорідному полі тяжіння і для пружнодеформованого тіла. Потенціальна енергія тіла масою *m*, піднятого на висоту h над поверхнею Землі, згідно (12.7), П(h)=mgh. Графік даної залежності П=П(h) - пряма лінія, що проходить через початок координат (рис. 15), кут нахилу якої до осі h тим більше, чим більше маса тіла (оскільки $\mathrm{tg}\,\alpha = mg$).

Нехай повна енергія тіла дорівнює E (її графік-пряма, паралельна осі h). На висоті h тіло володіє потенціальною енергією П, яка визначається відрізком вертикалі, укладеним між точкою h на осі абсцис і графіком П (h). Природно, що кінетична енергія T задається ординатою між графіком П(h) і горизонтальної прямої *EE*. З рис.15 випливає, що якщо $h=h_{max}$, то T=0 і $П=E=mgh_{max}$, тобто потенціальна енергія стає максимальною і рівною повній енергії.

З наведеного графіка можна знайти швидкість тіла на висоті h:

$$T=E-П,$$

Тобто

$$mv^2/2 = mgh_{max}-mgh,$$

звідки

$$v = \sqrt{2g(h_{max} - h)}.$$

Залежність потенціальної енергії пружної деформації $П=kx^2/2$ від деформації *x* має вигляд параболи (рис. 16), де графік заданої повної енергії тіла E - пряма, паралельна осі абсцис *x*, *а* значення *T* і *П* визначаються так само, як на рис. 15. З рис. 16 випливає, що зі зростанням деформації *x* потенціальна енергія тіла зростає, а кінетична - зменшується. Абсциса x_{max} визначає максимально можливу деформацію розтягування тіла, а $-x_{max}$ - максимально можливу деформацію стиску тіла. Якщо $x = \pm x_{max}$, то T=0 і $П=E=kx^2_{max}/2$, т. е. потенціальна енергія стає максимальною і рівної повної енергії.

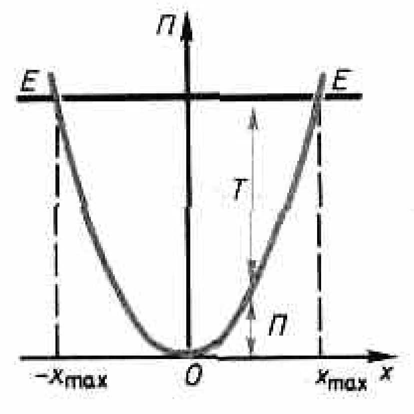

Рис. 16

З аналізу графіка на рис. 16 випливає, що при повній енергії тіла, що дорівнює Е, тіло не може зміститися правіше x_{max} і лівіше $-x_{max}$, оскільки кінетична енергія не може бути від'ємною величиною і, отже, потенціальна енергія не може бути більше повної. У такому випадку говорять, що тіло перебуває в **потенціальній ямі** з координатами $-x_{\max} < x < x_{\max}$.

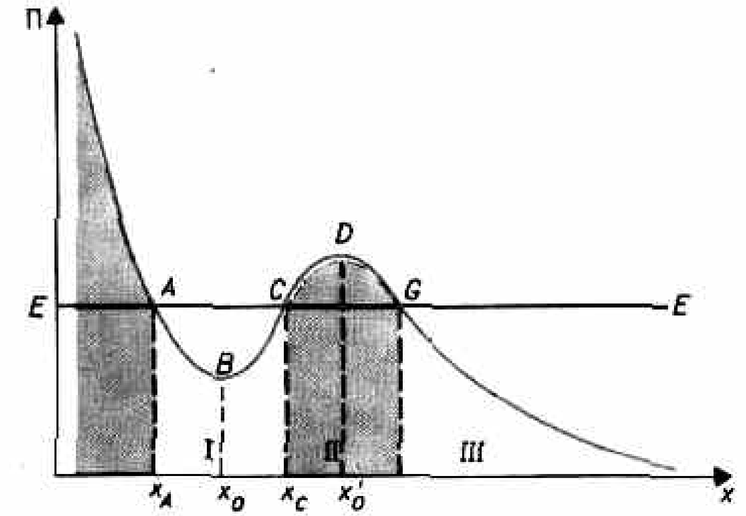

Рис. 17

У загальному випадку потенціальна крива може мати досить складний вигляд, наприклад з кількома максимумами і мінімумами, що йдуть по черзі (рис.17). Проаналізуємо цю потенціальну криву. Якщо Е - задана повна енергія частинки, то частка може знаходитися тільки там, де $\Pi(x) \le E$, тобто в областях І і ІІІ. Переходити з області І в ІІІ і назад частка не може, тому що їй перешкоджає потенціальний бар'єр CDG, ширина якого дорівнює інтервалу значень x, при яких $E < \Pi$, а його висота визначається різницею Π_{max}-E. Для того щоб частка змогла подолати потенціальний бар'єр, їй необхідно надати додаткову енергію, рівну висоті бар'єру або вищу за нього. В області 1 частинка з повною енергією Е виявляється «замкненою» в потенціальній ямі АВС і робить коливання між точками з координатами x_A і x_C. У точці В з координатою x_0 (рис. 17) потенціальна енергія частки мінімальна. Оскільки діюча на частку сила (див. § 12) $F_x=-\partial\Pi/\partial x$ (П - функція тільки однієї координати), а умова мінімуму потенціальної енергії $\partial\Pi/\partial x=0$, то в точці В $F_x = 0$. При зсуві частинки з положення x_0 (і вліво, і вправо) вона відчуває дію повертає сили, тому положення x_0 є положенням **стійкої рівноваги**. Зазначені умови виконуються і для точки x'_0 (для Π_{max}). Однак ця точка відповідає положенню **нестійкої рівноваги**, оскільки при зсуві частинки з положення x'_0 з'являється сила, яка прагне видалити її від цього положення.

§ 15. Зіткнення абсолютно пружних і непружних тіл

Прикладом застосування законів збереження імпульсу і енергії при вирішенні реальної фізичної задачі є удар абсолютно пружних і непружних тел.

Удар (або **зіткнення**) - це зіткнення двох або більше тіл, при якому взаємодія триває дуже короткий час. Виходячи з даного визначення, крім явищ, які можна віднести до ударів в прямому сенсі цього слова (зіткнення атомів або більярдних куль), сюди можна віднести й такі, як удар людини об землю при стрибку з трамвая і т. д. При ударі в тілах виникають такі значні внутрішні сили, що зовнішніми силами, що діють на них, можна знехтувати. Це дозволяє розглядати співударяючіся тіла як замкнену систему і застосовувати до неї закони збереження. Тіла під час удару зазнають деформацію. Сутність удару полягає в тому, що кінетична енергія відносного руху співударяючихся тіл на короткий час перетворюється в енергію пружної деформації. Під час удару має місце перерозподіл енергії між співударяючимися тілами. Спостереження показують, що відносна швидкість тіл після удару не досягає свого колишнього значення. Це пояснюється тим, що немає ідеально пружних тіл і ідеально гладких поверхонь. Відношення нормальних складових відносної швидкості тіл після і до удару називається **коефіцієнтом відновлення** ε:

$$\varepsilon = v'_n/v_n.$$

Якщо для зіштовхуючихся тіл ε=0, то такі тіла називаються **абсолютно непружними**, якщо ε=1 - **абсолютно пружними**. На практиці для всіх тіл $0<\varepsilon<1$ (наприклад, для сталевих куль ε≈0,56, для куль із слонової кістки ε≈0,89, для свинцю ε≈0). Проте в деяких випадках тіла можна з великою точністю розглядати або як абсолютно пружні, або як абсолютно непружні.

Пряма, що проходить через точку дотику тіл і нормальна до поверхні їхнього зіткнення, називається **лінією удару**. Удар називається **центральним**, якщо тіла до удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їх центри мас. Ми будемо розглядати тільки центральні абсолютно пружні і абсолютно непружні удари.

Абсолютно пружний удар - зіткнення двох тіл, в результаті якого в обох взаємодіючих тілах не залишається ніяких деформацій і вся кінетична енергія, якою володіли тіла до удару, після удару знову перетворюється в кінетичну енергію.

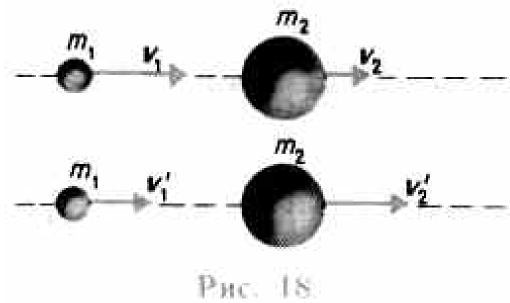

Рис. 18

Для абсолютно пружного удару виконуються закон збереження імпульсу і закон збереження кінетичної енергії. Позначимо швидкості куль масами m_1 і m_2 до удару через v_1 і v_2, після удару - через v'_1 і v'_2 (рис. 18). При прямому центральному ударі вектори швидкостей куль до і після удару лежать на прямій лінії, що сполучає їх центри. Проекції векторів швидкості на цю лінію рівні модулям швидкостей. Їх напрями врахуємо знаками: позитивне значення припишемо руху вправо, негативне - руху вліво.

При зазначених припущеннях закони збереження мають вигляд

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (15.1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (15.2)$$

Провівши відповідні перетворення в виразах (15.1) і (15.2), отримаємо

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2), \quad (15.3)$$

$$m_1 \left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2 \left(v_2'^2 - v_2^2\right), \quad (15.4)$$

откуда

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2. \quad (15.5)$$

Розв’язуючи рівняння (15.3) і (15.5), знаходимо

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (15.6)$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (15.7)$$

Розберемо декілька прикладів.

1) При $v_2 = 0$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1, \quad (15.8)$$

$$v'_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2}\, v_1. \quad (15.9)$$

Проаналізуємо вирази (15.8) і (15.9) для двох куль різних мас:

а) $m_1 = m_2$. Якщо друга куля до удару висіла нерухомо ($v_2 = 0$) (рис. 19), то після удару зупиниться перша куля ($v'_1 = 0$), а друга буде рухатися з тією ж швидкістю і в тому ж напрямку, в якому рухалась перша куля до удару ($v'_2 = v_1$);

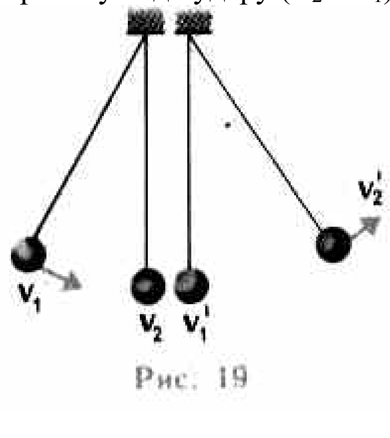

Рис. 19

б) $m_1 > m_2$. Перша куля продовжує рухатися в тому ж напрямку, як і до удару, але з меншою швидкістю ($v'_1 < v_1$). Швидкість другої кулі після удару більше, ніж швидкість першої після удару ($v'_2 > v'_1$) (рис.20);

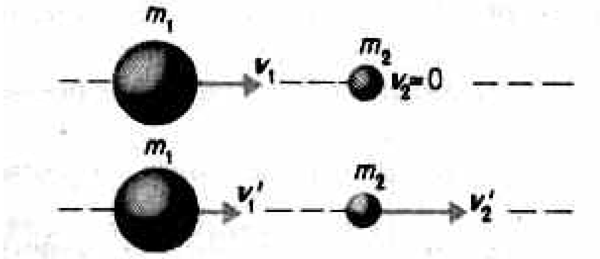

Рис. 20

в) $m_1 < m_2$. Напрямок руху першої кулі при ударі змінюється - куля відскакує назад. Друга куля рухається в ту ж сторону, в яку рухалась перша куля до удару, але з меншою швидкістю, тобто $v'_2 < v_1$ (рис. 21);

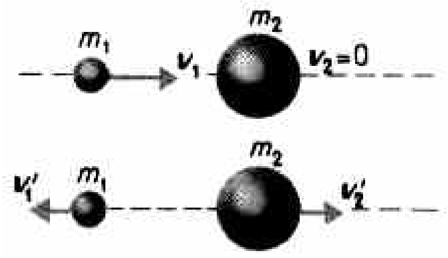

Рис. 21

г) $m_2 >> m_1$ (наприклад, зіткнення кулі зі стіною). З рівнянь (15.8) і (15.9) випливає, що $v'_1 = -v_1$, $v'_2 \approx 2m_1v_1/m_2 \approx 0$.

2) При $m_1 = m_2$ вирази (15.6) і (15.7) матимуть вигляд

$$v'_1 = v_2, \quad v'_2 = v_1,$$

тобто кулі рівної маси «обмінюються» швидкостями.

Абсолютно непружний удар - зіткнення двох тіл, в результаті якого тіла об'єднуються, рухаючись далі як єдине ціле.

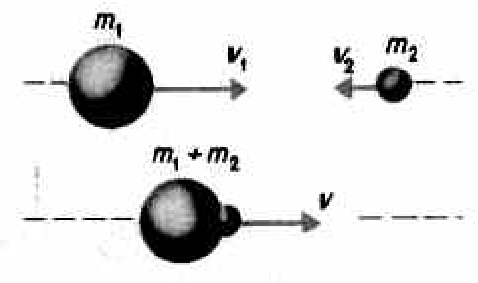

Рис. 22

Продемонструвати абсолютно непружний удар можна за допомогою куль з пластиліну (глини), що рухаються назустріч одна одній (рис. 22).

Якщо маси куль m_1 і m_2, їх швидкості до удару v_1 і v_2, то, використовуючи закон збереження імпульсу, можна записати

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v},$$

откуда

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (15.10)$$

Якщо кулі рухаються назустріч одна одній, то вони разом будуть продовжувати рухатися в ту сторону, в яку рухалась куля, що володіє більшим імпульсом. В окремому випадку якщо маси куль рівні ($m_1 = m_2$), то $v = (v_1+v_2)/2$.

З'ясуємо, як змінюється кінетична енергія куль при центральному абсолютно непружному ударі. Оскільки в процесі зіткнення куль між ними діють сили, що залежать не від самих деформацій, а від їх швидкостей, то ми маємо справу з силами, подібними до сил тертя, тому закон збереження механічної енергії не повинен дотримуватися. Внаслідок деформації відбувається «втрата» кінетичної енергії, яка перейшла в теплову або інші форми енергії. Цю «втрату» можна визначити по різниці кінетичної енергії тіл до і після удару:

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\,v^2}{2}.$$

Используя (15.10), получим

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2.$$

Якщо тіло, що зазнало удару було спочатку нерухомо ($v_2 = 0$), то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Коли $m_2 >> m_1$ (маса нерухомого тіла дуже велика), то $v << v_1$ і майже вся кінетична енергія тіла при ударі переходить в інші форми енергії. Тому, наприклад, для отримання значної деформації ковадло повинно бути масивніше молотка. Навпаки, при забиванні цвяхів в стіну маса молотка повинна бути набагато більшою ($m_1 >> m_2$), тоді $v \approx v_1$ і практично вся енергія витрачається на якомога більше переміщення цвяха, а не на залишкову деформацію стіни.

Абсолютно непружний удар - приклад того, як відбувається «втрата» механічної енергії під дією дисипативних сил.

Контрольні питання

- У чому відмінність між поняттями енергії і роботи?
- Як знайти роботу змінної сили?
- Яку роботу здійснює рівнодіюча всіх сил, прикладених до тіла, що рівномірно рухається по колу?
- Що таке потужність? Вивести її формулу.

- Дайте визначення і виведіть формули для відомих вам видів механічної енергії.
- Який зв'язок між силою і потенціальною енергією?
- Чому зміна потенціальної енергії обумовлена тільки роботою консервативних сил?
- У чому полягає закон збереження механічної енергії? Для яких систем він виконується?
- Чи необхідна умова замкнутості системи для виконання закону збереження механічної енергії?
- У чому фізична сутність закону збереження і перетворення енергії? Чому він є фундаментальним законом природи?
- Якою властивістю часу обумовлюється справедливість закону збереження механічної енергії?
- Що таке потенціальна яма? потенціальний бар'єр?
- Які висновки про характер руху тіл можна зробити з аналізу потенціальних кривих?
- Як охарактеризувати положення стійкої і нестійкої рівноваги? У чому їх відмінність?
- Чим відрізняється абсолютно пружний удар від абсолютно непружного?
- Як визначити швидкості тіл після центрального абсолютно пружного удару? Наслідком яких законів є ці вирази?

Задачі

3.1. Визначити: 1) роботу підняття вантажу по похилій площині; 2) середню і 3) максимальну потужності підйомного пристрою, якщо маса вантажу 10 кг, довжина похилої площини 2 м, кут її нахилу до горизонту 45 °, коефіцієнт тертя 0,1 і час підйому 2 с. [1) 170 Дж; 2) 85 Вт, 3) 173 Вт |

3.2. З вежі висотою 35 м горизонтально кинуто камінь масою 0,3 кг. Нехтуючи опором повітря, визначити: 1) швидкість, з якою кинуто камінь, якщо через 1 с після початку руху його кінетична енергія 60 Дж, 2) потенціальну енергію каменя через 1 с після початку руху. [1) 17,4 м / с, 2) 88,6 Дж]

3.3. Нехтуючи тертям, визначити найменшу висоту, з якої повинен скочуватися візок з людиною по жолобу, який переходить в петлю радіусом 10 м, щоб вона зробила повну петлю і не випала з жолоба. [25 м]

3.4. Куля масою m = 10 г, яка летіла горизонтально зі швидкістю v = 500 м/с, потрапляє в балістичний маятник довжиною l=1 м і масою M = 5 кг і застряє в ньому. Визначити кут відхилення маятника. [18°30']

3.5. Залежність потенціальної енергії частинки в центральному силовому полі від відстані r до центру поля задається виразом $\Pi(r) = A/r^2 - B/r$, де A і B - позитивні постійні. Визначити значення r_0, відповідне рівноважному стану частинки. Чи є це положення станом стійкої рівноваги? [$r_0 = 2A/B$]

3.6. При центральному абсолютно пружному ударі рухоме тіло масою m_1 вдаряється в тіло масою m_2, що покоїться, в результаті чого швидкість першого тіла зменшується в n = 1,5 рази. Визначити: 1) відношення m_1/m_2, 2) кінетичну енергію T'_2, з якою почне рухатися друге тіло, якщо початкова кінетична енергія першого тіла T_1 = 1000 Дж. [1) 5, 2) 555 Дж]

3.7. Тіло масою m_1 = 4 кг рухається зі швидкістю v_1 = 3 м/с і вдаряється об нерухоме тіло такої ж маси. Вважаючи удар центральним і непружним, визначити кількість теплоти, що виділилася при ударі. [9 Дж]